Teoría de Hodge I

por Pierre Deligne

1. Nos proponemos dar un diccionario heurístico entre enunciados en cohomología ℓ-ádica y enunciados en teoría de Hodge. Este diccionario tiene notablemente como fuentes [3] y la teoría conjetural de motivos de Grothendieck [2]. Hasta ahora, ha servido sobre todo para formular, en teoría de Hodge, conjeturas, y para las cuales a menudo ha sugerido una demostración.

Definición 1. *Una estructura de Hodge mixta H consiste en*

- *(a) Un $\mathbb{Z}$-módulo de tipo finito $H_{\mathbb{Z}}$ (la red entera);*
- *(b) Una filtración creciente finita W sobre $H_{\mathbb{Q}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ (la filtración por el peso);*
- *(c) Una filtración decreciente finita F sobre $H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ (la filtración de Hodge).*

Estos datos están sometidos al axioma:

Existe sobre $\mathrm{Gr}_W(H_{\mathbb{C}})$ una (única) bigraduación por subespacios $H^{p,q}$ tal que

- *(i) $\mathrm{Gr}^n_W(H_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$*
- *(ii) la filtración F induce sobre $\mathrm{Gr}_W(H_{\mathbb{C}})$ la filtración*

$$\mathrm{Gr}_W(F)^p = \bigoplus_{p' \geq p} H^{p',q'}$$

- *(iii) $\overline{H^{pq}} = H^{qp}$.*

Un *morfismo* $f : H \to H'$ es un homomorfismo $f_{\mathbb{Z}} : H_{\mathbb{Z}} \to H'_{\mathbb{Z}}$ tal que $f_{\mathbb{Q}} : H_{\mathbb{Q}} \to H'_{\mathbb{Q}}$ y $f_{\mathbb{C}} : H_{\mathbb{C}} \to H'_{\mathbb{C}}$ sean respectivamente compatibles con las filtraciones W y F.

Los *números de Hodge* de H son los enteros

$$h^{pq} = \dim H^{pq} = h^{qp}.$$

Se dice que H es puro de *peso* n si $h^{pq} = 0$ para $p + q \neq n$ (es decir, si $\mathrm{Gr}^i_W(H) = 0$ para $i \neq n$). Se dice entonces que H es una *estructura de Hodge de peso* n.

La *estructura de Hodge de Tate* $\mathbb{Z}(1)$ es la estructura de Hodge de peso -2, puramente de tipo $(-1,-1)$, para la cual $\mathbb{Z}(1)_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$ y $\mathbb{Z}(1)_{\mathbb{Z}} = 2\pi i\mathbb{Z} = \ker(\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*) \subset \mathbb{C}$. Escribiremos $\mathbb{Z}(n) = \mathbb{Z}(1)^{\otimes n}$.

Se puede demostrar que las estructuras de Hodge mixtas forman una categoría abeliana. Si $f : H \to H'$ es un morfismo, entonces $f_{\mathbb{Q}}$ y $f_{\mathbb{C}}$ son estrictamente compatibles con las filtraciones W y F ([1], 2.3.5).

2. Sean A un anillo normal íntegro de tipo finito sobre $\mathbb{Z}$, K su cuerpo de fracciones y $\overline{K}$ un cierre algebraico de K. Sea K_{nr} la mayor subextensión de $\overline{K}$ no ramificada en ningún ideal primo de A. Se sabe que, o se pone

$$\pi_1(\mathrm{Spec}(A), \overline{K}) = \mathrm{Gal}(K_{nr}/K).$$

Para cada punto cerrado x de $\mathrm{Spec}(A)$, definido por un ideal maximal $\mathfrak{m}_x$ de A, el cuerpo residual $k_x = A/\mathfrak{m}_x$ es finito; el punto x define una clase de conjugación de "sustituciones de Frobenius" $\varphi_x \in \pi_1(\mathrm{Spec}(A), \overline{K})$. Se escribe $q_x = \# k_x$ y $F_x = \varphi_x^{-1}$.

Sean K un cuerpo de tipo finito sobre el cuerpo primo de característica p, $\overline{K}$ un cierre algebraico de K, ℓ un número primo $\neq p$ y H un $\mathbb{Z}_\ell-$ (o un $\mathbb{Q}_\ell-$) módulo de tipo finito dotado de una acción continua ρ de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Se supondrá siempre en lo sucesivo que existe A como arriba, con ℓ invertible en A, tal que ρ se factoriza por $\pi_1(\mathrm{Spec}(A), \overline{K}) = \mathrm{Gal}(K_{nr}/K)$. Se dirá que H es *puro de peso* n si para cada punto cerrado x de un abierto no vacío de $\mathrm{Spec}(A)$, los valores propios α de F_x actuando sobre H son enteros algebraicos cuyos conjugados complejos son todos de valor absoluto $|\alpha| = q_x^{n/2}$.

PRINCIPIO 1. *Si el módulo galoisiano H "proviene de la geometría algebraica", existe sobre $H_{\mathbb{Q}_\ell} = H \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ una (única) filtración creciente W (la filtración por el peso), invariante por Galois, tal qe $\mathrm{Gr}_n^W(H)$ sea puro de peso n.*

Podemos pensar que $\mathrm{Gr}_n^W(H)$ es además semisimple.

Cuando se dispone de la resolución de singularidades, se puede a menudo dar de W una definición conjetural, cuya corrección resulta de las conjeturas de Weil [5] (ver 6).

Sea μ el subgrupo de $\overline{K}^*$ formado por las raíces de la unidad. El *módulo de Tate* $\mathbb{Z}_\ell(1)$, definido por

$$\mathbb{Z}_\ell(1) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell, \mu)$$

es puro de peso -2. Pondremos $\mathbb{Z}_\ell(n) = \mathbb{Z}_\ell(1)^{\otimes n}$.

Es trivial que todo morfismo $f : H \to H'$ es estrictamente compatible con la filtración por el peso.

El principio 1 concuerda con el hecho de que toda extensión de $\mathbb{G}_m$ ("peso -2") por una variedad abeliana ("peso -1¿-2") es trivial.

3. Traducción. - Los módulos galoisianos que aparecen en cohomología ℓ-ádica tienen como análogo, sobre $\mathbb{C}$, las estructuras de Hodge mixtas. Se tiene además el diccionario

módulo puro de peso n	estructura de Hodge de peso n
filtración por el peso	filtración por el peso
homomorfismo compatible con Galois	morfismo
módulo de Tate $\mathbb{Z}_\ell(1)$	estructura de Hodge de Tate $\mathbb{Z}(1)$

4. Sea X una variedad algebraica compleja (= esquema de tipo finito sobre $\mathbb{C}$, que se supondrá separado). Existe un subcuerpo K de $\mathbb{C}$, de tipo finito sobre $\mathbb{Q}$, tal que X se puede definir sobre K (es decir, proviene por extensión de escalares de K a $\mathbb{C}$ de un K-esquema X'). Sea $\overline{K}$ el cierre algebraico de K en $\mathbb{C}$. El grupo de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ actúa entonces sobre los grupos de cohomología ℓ-ádica $H^*(X, \mathbb{Z}_\ell)$; se tiene

$$H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_\ell = H^*(X, \mathbb{Z}_\ell) = H^*\left(X'_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_\ell\right).$$

Según 3, hay lugar de esperar que los grupos de cohomología $H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ portan estructuras de Hodge mixtas naturales. Es lo que se puede probar (ver [1], 3.2.5, para el caso donde X es lisa; la demostración es algebraica, a partir de la teoría de Hodge clásica [6]). Para X proyectiva y lisa, las conjeturas de Weil implican que $H^n(X, \mathbb{Z}_\ell)$ es puro de peso n, mientras que la teoría de Hodge clásica dota a $H^n(X, \mathbb{Z})$ de una estructura de Hodge de peso n. Para todo morfismo $f : X \to Y$ y para K suficientemente grande, $f^* : H^*(Y, \mathbb{Z}_\ell) \to H^*(X, \mathbb{Z}_\ell)$ conmuta con Galois (por transporte de estructuras); igualmente $f^* : H^*(Y, \mathbb{Z}) \to H^*(X, \mathbb{Z})$ es un morfismo de estructuras de Hodge mixtas. Para X lisa, la clase de cohomología en $H^{2n}(X, \mathbb{Z}_\ell(n))$ de un ciclo algebraico de codimensión n, Z, definido sobre K, es invariante por Galois, es decir define

$$c(Z) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}}(\mathbb{Z}_\ell(-n), H^{2n}(X, \mathbb{Z}_\ell)).$$

Igualmente, la clase de cohomología $c(Z) \in H^{2n}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ es puramente de tipo (n, n), es decir corresponde a

$$c(Z) \in \mathrm{Hom}_{H.M.}(\mathbb{Z}(-n), H^{2n}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})).$$

5. Si $f : H \to H'$ es un morfismo, compatible con Galois, entre $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriales de pesos diferentes, se tiene $f = 0$. Igualmente, si $f : H \to H'$ es un morfismo de estructuras de Hodge puras de pesos diferentes, entonces f es de torsión. Una observación más útil es el

Escolio 1. *Sean H y H' estructuras de Hodge de pesos n y n', con $n > n'$. Sea $f : H_{\mathbb{Q}} \to H'_{\mathbb{Q}}$ un homomorfismo tal que $f : H_{\mathbb{C}} \to H'_{\mathbb{C}}$ respeta F. Entonces $f = 0$.*

6. Sean X una variedad proyectiva y lisa sobre $\mathbb{C}$, $D = \sum_1^n D_i$ un divisor cuyas componentes con cruces normales en X, suma de divisores lisos, y j la inclusión en X de $U = X - D$. Para $Q \subset [1, n]$, se pone $D_Q = \bigcap_{i \in Q} D_i$.

En cohomología ℓ-ádica, se tiene canónicamente

$$R^q j_* \mathbb{Z}_\ell = \bigoplus_{\#Q=q} \mathbb{Z}_\ell(-q)_{D_Q},$$

y la sucesión espectral de Leray para j se escribe

$$E_2^{pq} = \bigoplus_{\#Q=q} H^p(D_Q, \mathbb{Q}_\ell) \otimes \mathbb{Z}_\ell(-q) \Rightarrow H^{p+q}(U, \mathbb{Q}_\ell).$$

Según las conjeturas de Weil [5], $H^p(D_Q, \mathbb{Q}_\ell)$ es puro de peso p, de modo que E_2^{pq} es puro de peso $p+2q$. En tanto que cociente de un subobjeto de E_2^{pq}, E_r^{pq} también es puro de peso $p+2q$. Según 5, $d_r = 0$ para $r \geq 3$, pues los pesos $p+2q$ y $p+2q-r+2$ de E_r^{pq} y $E_r^{p+r,q-r+1}$ son diferentes. Se tiene entonces $E_3^{pq} = E_\infty^{2k-n,n-k}$. Salvo una renumeración, la filtración por el peso de $H^*(U, \mathbb{Q}_\ell)$ es la resultante de (6.2)

$$\mathrm{Gr}_n^W(H^k(U, \mathbb{Q}_\ell)) = E_3^{2k-n,n-k}$$

7. En cohomología entera, para la topología usual, la sucesión espectral de Leray para j se escribe

$$E_2'^{pq} = \bigoplus_{\#Q=q} H^p(D_Q, \mathbb{Z}) \Rightarrow H^{p+q}(U, \mathbb{Z}).$$

Como cada D_Q es una variedad proyectiva no singular, E_2^{pq} está dotado de una estructura de Hodge de peso p. Ponemos $E_2^{pq} = E_2'^{pq} \otimes \mathbb{Z}(-q)$ (estructura de Hodge de peso $p+2q$). Como grupo abeliano, $E_2^{pq} = E_2'^{pq}$; es interesante considerar la anterior como una sucesión espectral de término inicial E_2^{pq}. Según 3, se debe esperar que $d_2 : E_2^{pq} \to E_2^{p+2,q-1}$ sea un morfismo de estructuras de Hodge. Se prueba interpretando d_2 como un morfismo de Gysin. De ahí que E_3^{pq} está dotado de una estructura de Hodge de peso $p+2q$. Según 3, se espera que, *módulo torsión*, la sucesión espectral degenera en el término E_3 ($E_3 = E_\infty$), y con esto que la nulidad de los d_r ($r \geq 3$) sea una aplicación de 5.1. Este programa se lleva a cabo en [1] 3.2. Se *define* la filtración por el peso de $H^*(U, \mathbb{Q})$ como resultante de la sucesión espectral, salvo renumeración.

En efecto, para dotar los grupos de cohomología H^* de una estructura de Hodge mixta, el punto clave ha sido encontrar una sucesión espectral E que resulte en H^* cuyo análogo ℓ-ádico sea conjeturalmente puro (de peso $p+2q$); E_2^{pq} debe entonces portar una estructura de Hodge natural (de peso $p+2q$) y la filtración W es la resultante de E.

8. Sea Spec(V) el espectro de un anillo de valoración discreta henseliano (un *trazo henseliano*) de cuerpo de fracciones K y cuerpo residual k de tipo finito sobre el cuerpo primo de característica p. Sean $\overline{K}$ un cierre algebraico de K y H un vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{Q}_\ell$ ($\ell \neq p$), sobre el cual Gal$(\overline{K}/K)$ opera de modo continuo. Según Grothendieck, se sabe ([4], apéndice) que un subgrupo de índice finito del grupo de inercia I actúa de modo unipotente. Reemplazando V por una extensión finita, se reduce al caso en que la acción de I entera es unipotente (caso *semiestable*); ella se factoriza entonces por el mayor pro-ℓ-grupo I_ℓ, cociente de I, canónicamente isomorfo a $\mathbb{Z}_\ell(1)$.

Principio 2. *En el caso semiestable, si el módulo galoisiano H "proviene de la geometría algebraica", existe una (única) filtración creciente W de H (la filtración por el peso), tal que I actúa trivialmente sobre $\mathrm{Gr}_n^W(H)$ y que $\mathrm{Gr}_n^W(H)$, en tanto que módulo galoisiano bajo $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \simeq \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)/I$, sea puro de peso n.*

Se comparará con el Principio 1 y con el apéndice de [4].

Cuando se dispone de la resolución de singularidades, se puede a menudo dar de W una definición conjetural, cuya validez resulta de las conjeturas de Weil. Con ayuda de la resolución y de Weil, es a menudo fácil demostrar que en todo caso H se desmonta en módulos galoisianos (bajo $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$) puros.

Supongamos H semiestable. Para $T \in I_\ell$, se define $\log T$ como la suma *finita* $-\sum_{n>0}(\mathrm{Id}-T)^n/n$. La aplicación $(T,x) \mapsto \log T(x)$ se identifica con un homomorfismo

$$M : \mathbb{Z}_\ell(1) \otimes H \to H.$$

Como $\mathbb{Z}_\ell(1)$ es de peso -2, se tiene necesariamente (ver 5)

$$M(\mathbb{Z}_\ell(1) \otimes W_n(H)) \subset W_{n-2}(H)$$

y M induce

$$\mathrm{Gr}(M) : \mathbb{Z}_\ell(1) \otimes \mathrm{Gr}_n^W(H) \to \mathrm{Gr}_{n-2}^W(H).$$

Si X es una variedad proyectiva no singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k_0, se define

$$L : \mathbb{Z}_\ell(-1) \otimes H^*(X, \mathbb{Z}_\ell) \to H^*(X, \mathbb{Z}_\ell)$$

como el producto cup con la clase de cohomología de una sección hiperplana. Se notará una analogía formal entre L y M; igual que M está definida por una acción de $\mathbb{Z}_\ell(1)$, se puede considerar L como definido por una acción de $\mathbb{Z}_\ell(1)$; L aumenta el grado en 2, y $\mathrm{Gr}(M)$ lo disminuye en 2.

9. Sean D el disco unidad, $D^* = D - \{0\}$ y X

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{P}^r(\mathbb{C}) \times D \arrow[dl, "pr_2"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

una familia de variedades proyectivas parametrizada por D, con f propio y $f|D^*$ liso. Mantenemos las notaciones de 8, y recordamos que en la analogía entre trazo henseliano y pequeño entorno de 0 en la recta compleja se tiene el diccionario siguiente (obsérvese que el espectro del anillo de gérmenes de funciones holomorfas en 0 es un trazo henseliano):

D	$\mathrm{Spec}(V)$
D^*	$\mathrm{Spec}(K)$
un revestimiento universal $\tilde{D}^*$ de D^*	$\mathrm{Spec}(\overline{K})$
grupo fundamental $\pi_1(D^*)$	grupo de inercia I
(con $\pi_1(D^*) = \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}(1)_{\mathbb{Z}}$)	(con $I_\ell = \mathbb{Z}_\ell(1)$)
X	esquema proyectivo X sobre $\mathrm{Spec}(V)$
$X^* = f^{-1}(D^*)$	X_K
$\tilde{X} = X \times_D \tilde{D}^*$	$X_{\overline{K}}$
sistema local $R^i f_* \mathbb{Z} \vert D^*$	módulo galoisiano $H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_\ell)$
$H^i(\tilde{X}, \mathbb{Z})$	$H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_\ell)$

Se notará que $\tilde{X}$ es homotópicamente equivalente a cada una de las fibras $X_t = f^{-1}(t)$ $(t \in D^*)$: $H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_\ell)$ tiene todavía como análogo $H^i(X_t, \mathbb{Z})$ y a la acción de I corresponde la transformación de monodromía T.

Aquí también, se sabe que un subgrupo de índice finito de $\pi_1(D^*)$ actúa de modo unipotente sobre $H^i(\tilde{X}, \mathbb{Q}) = H^i(X_t, \mathbb{Q})$. Pongámonos en el caso semiestable donde $\pi_1(D^*)$ entero actúa de modo unipotente (esto se conlleva reemplazar D por un revestimiento finito), y sea T la acción del generador canónico de $\pi_1(D^*)$.

Por 3 y 8, se espera que $H^i(\tilde{X}, \mathbb{Q}) \simeq H^i(X_t, \mathbb{Q})$ esté dotado de una filtración creciente W, que $\mathrm{Gr}_n^W(H^i(\tilde{X}, \mathbb{Q}))$ esté dotado de una estructura de Hodge de peso n, que $\log T(W_n) \subset W_{n-2}$ y que $\log T$ induce un morfismo de estructuras de Hodge

$$M_n : \mathbb{Z}(-1) \otimes \mathrm{Gr}_n^W(H^i) \to \mathrm{Gr}_{n-2}^W(H^i).$$

Nos gustaría además que M tuviese un análogo.

Se llega en efecto a definir, para cada vector u del espacio tangente a D en $\{0\}$, una estructura de Hodge mixta $\mathcal{H}_u$ sobre $H^i(\tilde{X}, \mathbb{Z})$. La filtración W y las estructuras de Hodge sobre los $\mathrm{Gr}_n^W(H^i)$ son independientes de u, y la dependencia en u de $\mathcal{H}_u$ se expresa simplemente en términos de T. En analogía con lo anteiror, se encuentra que, para cualquier u, $\log T$ induce un morfismo de estructuras de Hodge mixtas

$$M : \mathbb{Z}(1) \otimes H^i(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \to H^i(\tilde{X}, \mathbb{Z}).$$

Finalmente, la analogía anterior no es tramposa (pero aquí, el hecho de que $f|D^*$ se supone propio y liso es sin duda esencial). Se demuestra que

$$(\log T)^k : \mathrm{Gr}_{n+k}^W(H^n(\tilde{X}, \mathbb{Q})) \to \mathrm{Gr}_{n-k}^W(H^n(\tilde{X}, \mathbb{Q}))$$

es un isomorfismo para todo k (cf. [6], IV 6, cor. al th. 5). Esto caracteriza la filtración W. Hasta ahora, no se dispone de un análogo al teorema de positividad de Hodge más que en casos muy particulares. Esperamos que las estructuras mixtas $\mathcal{H}_u$ determinen el comportamiento asintótico, para $t \to 0$, de la familia de estructuras puras $H^i(X_t, \mathbb{Z})$ $(t \in D^*)$.

Bibliografía

[1] P. Deligne: *Teoría de Hodge.* (Por publicar)
[2] M. Demazure: *Motivos de variedades algebraicas* (1969).
[3] J.-P. Serre: *Análogos Kählerianos de ciertas conjeturas de Weil.* (1960).
[4] J.-P. Serre y J. Tate: *Buena reducción de variedades abelianas.* (1968)
[5] A. Weil: *Número de soluciones de ecuaciones en cuerpos finitos.* 1949.
[6] A. Weil: *Introducción al estudio de las variedades kählerianas.* 1958.