HACES ALGEBRAICOS COHERENTES

Jean-Pierre Serre

Publicado en marzo, 1955

Traducido por Pablo Curiel (pcurielbarroso@usal.es)

Introducción

Es bien sabido que los métodos cohomológicos, especialmente la teoría de haces, juegan un papel cada vez mayor no solo en la teoría de funciones de varias variables complejas ([**5**]), sino también en la geometría algebraica clásica (baste citar los trabajos recientes de Kodaira-Spencer sobre el teorema de Riemann-Roch). El carácter algebraico de estos métodos sugiere la posibilidad de aplicarlos también a la geometría algebraica abstracta; el objetivo de este trabajo es demostrar esa posibilidad.

Resumimos a continuación el contenido de cada capítulo:

El Capítulo I está dedicado a la teoría general de haces. Contiene los resultados de dicha teoría que se utilizan en los otros dos capítulos. Las diversas operaciones algebraicas que se pueden efectuar sobre los haces se describen en la §1; siguiendo fielmente la exposición de Cartan ([**2**], [**5**]). La §2 contiene el estudio de los haces de módulos coherentes; que generalizan los haces coherentes analíticos ([**3**], [**5**]), manteniendo propiedades análogas. En la §3 se definen los grupos de cohomología de un espacio X con coeficientes en un haz $\mathcal{F}$. En las aplicaciones que siguen, X es una variedad algebraica provista de la topología de Zariski, que no es un espacio de Hausdorff y por tanto los métodos utilizados por Leray [**10**] o Cartan [**3**] (basados en "particiones de la unidad" o haces "finos") no son válidos; así que recurrimos al modo de Čech de definir los grupos de cohomología $H^q(X, \mathcal{F})$ por paso al límite sobre recubrimientos abiertos cada vez más y más finos. Otra dificultad debida a que X no sea de Hausdorff tiene que ver con la "sucesión exacta de cohomología"(ver n$^{\text{o}}$s 24 y 25): solo conseguimos construir esa sucesión exacta en casos particulares, que sin embargo son suficientes para los propósitos que teníamos en mente (ver n$^{\text{o}}$s 24 y 47).

El Capítulo II comienza con una definición de variedad algebraica, análoga a la de Weil ([**17**], Cap. VII), pero incluyendo el caso de variedades reducibles (nótese que, en contra del convenio usado por Weil, no reservamos el término "variedad" para las que sean irreducibles); definimos la estructura de una variedad algebraica por medio de una topología (la topología de Zariski) y de un subhaz del haz de gérmenes de funciones (el haz de anillos locales). Un haz algebraico coherente sobre una variedad algebraica V es simplemente un haz coherente de $\mathcal{O}_V$-módulos, donde $\mathcal{O}_V$ denota el haz de anillos locales de V; damos ejemplos variados de esta noción en la §2. La §3 está dedicada a las variedades afines. Los resultados que se obtienen son similares a los que hay para variedades de Stein ([**3**], [**5**]): si $\mathcal{F}$ es un haz algebraico coherente sobre la variedad afín V, se tiene que $H^q(V, \mathcal{F}) = 0$ para todo $q > 0$, y $\mathcal{F}_x$ está generado por $H^0(V, \mathcal{F})$, para cualquier $x \in V$. Más aún (§4), $\mathcal{F}$ está completamente determinado por $H^0(V, \mathcal{F})$, considerado como módulo sobre el anillo de coordenadas de V.

El Capítulo III, relativo a las variedades proyectivas, contiene los resultados esenciales de este trabajo. Comenzamos estableciendo una correspondencia entre haces algebraicos coherentes sobre el espacio proyectivo $X = \mathbb{P}_r(K)$ y S-módulos graduados verificando la condición (TF) del n$^{\text{o}}$ 56 (aquí, S denota el álgebra de polinomios $K[t_0, \ldots, t_r]$); esta correspondencia es biunívoca si se conviene en identificar dos S-módulos cuyas componentes homogéneas difieran solo en grados suficientemente bajos (para enunciados más precisos, véanse los n$^{\text{o}}$s 57, 59 y 65). En consecuencia, toda cuestión sobre $\mathcal{F}$ se puede traducir a una cuestión sobre el S-módulo asociado M. De esta manera describimos en la §3 un procedimiento que posibilita una determinación algebraica de los $H^q(X, \mathcal{F})$ a partir de M, que en particular nos permitirá estudiar las propiedades de los $H^q(X, \mathcal{F}(n))$ para n tendiendo a $+\infty$ (para la definición de $\mathcal{F}(n)$, ver n$^{\text{o}}$ 54); los resultados obtenidos se enuncian en los n$^{\text{o}}$s 65 y 66. En la §4, relacionamos los grupos $H^q(X, \mathcal{F})$ con los funtores Ext_S^q introducidos por Cartan-Eilenberg [**6**]; ello nos permite, en la §5, estudiar el comportamiento de los $H^q(X, \mathcal{F}(n))$, con n tendiendo a $-\infty$, y dar una caracterización homológica de las variedades "k veces de primera especie". La §6 expone algunas propiedades elementales de la característica de Euler-Poincaré de una variedad proyectiva, con coeficientes en un haz algebraico coherente.

En el futuro mostraremos cómo se pueden aplicar los resultados generales de la presente memoria a diversos problemas concretos, en particular a la extensión al caso abstracto del "teorema de dualidad" de [**15**], y a la deducción de parte de los resultados de Kodaira-Spencer sobre el teorema de Riemann-Roch; en dichas aplicaciones, los teoremas de los n$^{\text{o}}$s 66, 75 y 76 juegan un papel esencial. También demostraremos que, cuando el cuerpo base es el de los complejos, la teoría de haces algebraicos coherentes es esencialmente idéntica a la de los haces analíticos coherentes [**4**].

Índice general

Capítulo I. Haces

§1. Operaciones sobre haces

1. Definición de haz. Sea X un espacio topológico. Un *haz de grupos abelianos* sobre X (o simplemente un *haz*) consiste en:

(a) *Una función $x \to \mathcal{F}_x$ que asigna a cada $x \in X$ un grupo abeliano $\mathcal{F}_x$.*
(b) *Una topología sobre el conjunto $\mathcal{F}$, unión disjunta de todos los $\mathcal{F}_x$.*

Si f es un elemento de $\mathcal{F}_x$, pondremos $\pi(f) = x$; la aplicación π recibe el nombre de *proyección* de $\mathcal{F}$ sobre X; denotaremos por $\mathcal{F} + \mathcal{F}$ al subconjunto de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ formado por las parejas (f, g) tales que $\pi(f) = \pi(g)$.

Fijadas las definiciones anteriores, imponemos dos axiomas sobre los datos (a) y (b):

(I) *Para cada $f \in \mathcal{F}$, existe un entorno V de f y un entorno U de $\pi(f)$ tal que la restricción de π a V es un homeomorfismo de V en U.*
(En otras palabras, π es un homeomorfismo local).
(II) *La aplicación $f \to -f$ es una aplicación continua de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}$, y la aplicación $(f, g) \to f + g$ es una aplicación continua de $\mathcal{F} + \mathcal{F}$ en $\mathcal{F}$.*

Observamos que, aunque X sea de Hausdorff (cosa que no vamos a suponer), $\mathcal{F}$ no tiene por qué serlo, como muestra por ejemplo el haz de gérmenes de funciones ([**3**]).

Ejemplo. Dado un grupo abeliano G, definamos $\mathcal{F}_x = G$ para cada $x \in X$; el conjunto $\mathcal{F}$ coincide con el producto $X \times G$, y si lo dotamos de la topología producto de la topología en X con la topología discreta de G, obtenemos un haz, llamado *haz constante* isomorfo a G, y que se suele identificar con el propio G.

2. Secciones de un haz. Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre el espacio X, y sea U un subconjunto de X. Se llama *sección* de $\mathcal{F}$ a lo largo de U a toda aplicación continua $s : U \to \mathcal{F}$ tal que $\pi \circ s$ sea la aplicación identidad en U. Por tanto tenemos que $s(x) \in \mathcal{F}_x$ para todo $x \in U$. El conjunto de secciones de $\mathcal{F}$ a lo largo de U será denotado por $\Gamma(U, \mathcal{F})$; el axioma (II) implica que $\Gamma(U, \mathcal{F})$ es un grupo abeliano. Si $U \subset V$ y s es una sección a lo largo de V, la restricción de s a U es una sección a lo largo de U, lo que da un morfismo de grupos $\rho_U^V : \Gamma(V, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$.

Si U es abierto en X, $s(U)$ es abierto en $\mathcal{F}$, y cuando U recorre una base de abiertos de X, los $s(U)$ recorren una base de abiertos de $\mathcal{F}$: esto no es más que una reformulación del axioma (I).

Nótese la siguiente consecuencia del axioma (I): Para todo $f \in \mathcal{F}_x$, existe una sección s sobre un entorno de x tal que $s(x) = f$, y dos secciones que cumplan esta propiedad coinciden en un entorno de x. Dicho de otro modo, $\mathcal{F}_x$ es el *límite inductivo* de los $\Gamma(U, \mathcal{F})$ respecto al conjunto ordenado filtrante de los entornos de x.

3. Construcción de haces. Supongamos que nos dan, para cada abierto $U \subset X$, un grupo abeliano $\mathcal{F}_U$, y para cada pareja de abiertos $U \subset V$, un morfismo de grupos

$\varphi_U^V : \mathcal{F}_V \to \mathcal{F}_U$, de tal manera que para cualesquiera abiertos $U \subset V \subset W$ se verifique la propiedad transitiva $\varphi_U^V \circ \varphi_V^W = \varphi_U^W$.

La colección de los $(\mathcal{F}_U, \varphi_U^V)$ permite entonces definir un haz de la siguiente manera:

(a) Ponemos $\mathcal{F}_x = \lim \mathcal{F}_U$ (es el límite inductivo respecto del conjunto ordenado filtrante de los entornos abiertos U de x). Si x está en el abierto U, se tiene un morfismo canónico $\varphi_x^U : \mathcal{F}_U \to \mathcal{F}_x$.

(b) Sea $t \in \mathcal{F}_U$, y denotemos por $[t, U]$ el conjunto de los $\varphi_x^U(t)$ cuando x recorre U; tenemos que $[t, U] \subset \mathcal{F}$, y consideramos en $\mathcal{F}$ la topología generada por los $[t, U]$. De esta manera, cada elemento $f \in \mathcal{F}_x$ admite como base de entornos en $\mathcal{F}$ los conjuntos $[t, U]$, donde $x \in U$ y $\varphi_x^U(t) = f$.

Se comprueba inmediatamente que los datos (a) y (b) satisfacen los axiomas (I) y (II), es decir, que $\mathcal{F}$ es efectivamente un haz. Decimos entonces que es el haz *definido por el sistema* $(\mathcal{F}_U, \varphi_U^V)$.

Si $t \in \mathcal{F}_U$, la aplicación $x \to \varphi_x^U(t)$ es una sección a lo largo de U; lo que da un morfismo canónico $\iota : \mathcal{F}_U \to \Gamma(U, \mathcal{F})$.

PROPOSICIÓN 1. *Para que $\iota : \mathcal{F}_U \to \Gamma(U, \mathcal{F})$ sea inyectiva*[1]*, es necesario y suficiente que se verifique la siguiente condición:*

Si un elemento $t \in \mathcal{F}_U$ es tal que existe un recubrimiento abierto $\{U_i\}$ de U con $\varphi_{U_i}^U(t) = 0$ para todo i, entonces $t = 0$.

Si $t \in \mathcal{F}_U$ verifica la condición anterior, entonces

$$\varphi_x^U(t) = \varphi_x^{U_i}(t) \circ \varphi_{U_i}^U(t) = 0 \qquad \text{para } x \in U_i,$$

lo que significa que $\iota(t) = 0$. Recíprocamente, supongamos que $\iota(t) = 0$, con $t \in \mathcal{F}_U$; dado que $\varphi_x^U(t) = 0$ para $x \in U$, existe un entorno abierto $U(x)$ de x tal que $\varphi_{U(x)}^U(t) = 0$, por definición del límite inductivo. Los $U(x)$ forman entonces un recubrimiento abierto de U verificando la condición del enunciado.

PROPOSICIÓN 2. *Sea U un abierto de X, y supongamos que $\iota : \mathcal{F}_V \to \Gamma(V, \mathcal{F})$ es inyectivo para todo abierto $V \subset U$. Para que $\mathcal{F}_U \to \Gamma(U, \mathcal{F})$ sea epiyectivo (y por tanto, biyectivo), es necesario y suficiente que se cumpla la siguiente propiedad:*

Para todo recubrimiento abierto $\{U_i\}$ de U, y toda familia $\{t_i\}$, $t_i \in \mathcal{F}_{U_i}$ tales que $\varphi_{U_i \cap U_j}^{U_i}(t_i) = \varphi_{U_i \cap U_j}^{U_j}(t_j)$ para cada pareja (i, j), existe $t \in \mathcal{F}_U$ con $\varphi_{U_i}^U(t) = t_i$ para todo i.

La condición es necesaria: cada t_i define una sección $s_i = \iota(t_i)$ a lo largo de U_i, y tenemos que $s_i = s_j$ a lo largo de $U_i \cap U_j$; existe entonces una sección a lo largo de U que coincide con s_i en U_i para cada i; si $\iota : \mathcal{F}_U \to \Gamma(U, \mathcal{F})$ es epiyectivo, existe $t \in \mathcal{F}_U$ tal que $\iota(t) = s$. Poniendo $t_i' = \varphi_{U_i}^U(t)$, la sección definida por t_i' sobre U_i no es otra que s_i; luego $\iota(t_i - t_i') = 0$ y se deduce que $t_i = t_i'$ de la inyectividad de ι.

[1] Recordamos ([**1**]) que una aplicación $f : E \to E'$ se dice que es *inyectiva* si $f(e_1) = f(e_2)$ implica que $e_1 = e_2$, *epiyectiva* si $f(E) = E'$ y *biyectiva* si es a la vez inyectiva y epiyectiva. A las aplicaciones inyectivas (resp. epiyectivas, biyectivas) se le llama también inyecciones (resp. sobreyecciones, biyecciones)

La condición es suficiente: si s es una sección de $\mathcal{F}$ a lo largo de U, existen un recubrimiento abierto $\{U_i\}$ de U, y elementos $t_i \in \mathcal{F}_{U_i}$ tales que $\iota(t_i)$ son iguales a la restricción de s a U_i; se sigue que los elementos $\varphi^{U_i}_{U_i \cap U_j}(t_i)$ y $\varphi^{U_j}_{U_i \cap U_j}(t_j)$ definen la misma sección a lo largo de $U_i \cap U_j$, luego son iguales por la hipótesis sobre ι. Si $t \in \mathcal{F}_U$ es tal que $\varphi^U_{U_i}(t) = t_i$, $\iota(t)$ coincide con s sobre cada U_i, luego sobre U, y hemos acabado.

Proposición 3. *Si $\mathcal{F}$ es un haz de grupos abelianos sobre X, el haz definido por el sistema $(\Gamma(U, \mathcal{F}), \rho^V_U)$ es canónicamente isomorfo a $\mathcal{F}$.*

Esto resulta inmediatamente de las propiedades vistas en el nº 2.

La Proposición 3 muestra que todo haz se puede definir mediante un sistema $(\mathcal{F}_U, \varphi^V_U)$ conveniente. Nótese que dos sistemas diferentes pueden definir el *mismo* haz $\mathcal{F}$; sin embargo, si imponemos que $(\mathcal{F}_U, \varphi^V_U)$ verifique las condiciones de las Proposiciones 1 y 2, existe un único sistema posible (salvo isomorfismos): el formado por los $(\Gamma(U, \mathcal{F}), \rho^V_U)$.

Ejemplo. Sea G un grupo abeliano, y tomemos como $\mathcal{F}_U$ el conjunto de funciones de U en G; definamos $\varphi^V_U : \mathcal{F}_V \to \mathcal{F}_U$ por la operación de *restricción* de una función. Obtenemos así un sistema $(\mathcal{F}_U, \rho^V_U)$, dando un haz $\mathcal{F}$, llamado *haz de gérmenes de funciones* valoradas en G. Se verifica enseguida que el sistema $(\mathcal{F}_U, \varphi^V_U)$ verifica las condiciones de las Proposiciones 1 y 2; resulta entonces que podemos identificar las secciones de $\mathcal{F}$ sobre un abierto U con los elementos de $\mathcal{F}_U$.

4. Pegado de haces. Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre X, y sea U un subconjunto de X; el conjunto $\pi^{-1}(U) \subset \mathcal{F}$, con la topología inducida por la de $\mathcal{F}$, forma un haz sobre U, llamado haz *inducido* por $\mathcal{F}$ en U, y se denota por $\mathcal{F}(U)$ (o por $\mathcal{F}$, cuando no haya riesgo de confusión).

Veremos que, recíprocamente, se puede definir un haz sobre X a partir de haces sobre abiertos que recubran X:

Proposición 4. *Sea $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, un recubrimiento abierto de X, y, para cada $i \in I$, sea $\mathcal{F}_i$ un haz sobre U_i; para toda pareja (i, j), sea θ_{ij} un isomorfismo de $\mathcal{F}_j(U_i \cap U_j)$ en $\mathcal{F}_i(U_i \cap U_j)$; supongamos que $\theta_{ij} \circ \theta_{jk} = \theta_{ik}$ en todo punto de $U_i \cap U_j \cap U_k$, para toda terna (i, j, k).*

Entonces existen un haz $\mathcal{F}$ y para cada $i \in I$ un isomorfismo η_i de $\mathcal{F}(U_i)$ en $\mathcal{F}_i$, tales que $\theta_{ij} = \eta_i \circ \eta_j^{-1}$ en todo punto de $U_i \cap U_j$. Además, $\mathcal{F}$ y los η_i son los únicos que verifican dicha condición, salvo isomorfismos.

La unicidad de $\{\mathcal{F}, \eta_i\}$ es evidente; para demostrar la existencia, podríamos definir $\mathcal{F}$ como cociente del espacio suma de los $\mathcal{F}_i$. En vez de eso seguiremos el procedimiento del nº 3: si U es un abierto de X, sea $\mathcal{F}_U$ el grupo cuyos elementos son las familias $\{s_k\}_{k \in I}$, con $s_k \in \Gamma(U \cap U_k, \mathcal{F}_k)$, y $s_k = \theta_{kj}(s_j)$ sobre $U \cap U_j \cap U_k$; si $U \subset V$, se define φ^V_U del modo evidente. El haz definido por el sistema $(\mathcal{F}_U, \varphi^V_U)$ es el haz $\mathcal{F}$ buscado; además, si $U \subset U_i$, la aplicación que a la familia $\{s_k\} \in \mathcal{F}_U$ le asocia el elemento $s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F}_i)$ es un isomorfismo de $\mathcal{F}_U$ con $\Gamma(U, \mathcal{F}_i)$, por la condición de transitividad; se obtiene entonces un isomorfismo $\eta_i : \mathcal{F}(U_i) \to \mathcal{F}_i$ que evidentemente satisface la condición pedida.

Se dice que el haz $\mathcal{F}$ se obtiene mediante el *pegado* de los haces $\mathcal{F}_i$ a través de los isomorfismos θ_{ij}.

5. Extensión y restricción de haces. Sean X un espacio topológico, Y un subespacio cerrado de X y $\mathcal{F}$ un haz sobre X. Diremos que $\mathcal{F}$ *está concentrado en* Y, o que *es nulo fuera de* Y si $\mathcal{F}_x = 0$ para todo $x \in X - Y$.

PROPOSICIÓN 5. *Si el haz $\mathcal{F}$ está concentrado en Y, el morfismo*

$$\rho_Y^X : \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(Y, \mathcal{F}(Y))$$

es biyectivo.

Si una sección de $\mathcal{F}$ a lo largo de X es nula a lo largo de Y, entonces es nula siempre, porque $\mathcal{F}_x = 0$ si $x \notin Y$, luego ρ_Y^X es inyectiva. Recíprocamente, sea s una sección de $\mathcal{F}(Y)$ a lo largo de Y, que prolongamos a X poniendo $s(x) = 0$ cuando $x \notin Y$; la aplicación $x \to s(x)$ es evidentemente continua en $X - Y$; por otro lado, si $x \in Y$, existe una sección s' de $\mathcal{F}$ a lo largo de un entorno U de x tal que $s'(x) = s(x)$; como s es continua en Y por hipótesis, existe un entorno V de x, contenido en U tal que $s'(y) = s(y)$ para todo $y \in V \cap Y$; dado que $\mathcal{F}_y = 0$ si $y \notin Y$, se tiene también que $s'(y) = s(y)$ para $y \in V - V \cap Y$; luego s y s' coinciden sobre V, lo que prueba que s es continua sobre un entorno de Y, luego continua en X. Se sigue que ρ_Y^X es epiyectiva, lo que concluye la demostración.

Ahora veremos que el haz $\mathcal{F}(Y)$ determina sin ambigûedad al haz $\mathcal{F}$:

PROPOSICIÓN 6. *Sea Y un subespacio cerrado de un espacio X, y sea $\mathcal{G}$ un haz sobre Y. Pongamos $F_x = \mathcal{G}_x$ si $x \in Y$, $\mathcal{F}_x = 0$ si $x \notin Y$, y sea $\mathcal{F}$ la unión disjunta de los $\mathcal{F}_x$. Existe una única estructura de haz sobre X para $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}(Y) = \mathcal{G}$.*

Sea U un abierto de X; si s es una sección de $\mathcal{G}$ sobre $U \cap Y$, extendemos s por 0 a $U - U \cap Y$; cuando s recorre $\Gamma(U \cap Y, \mathcal{G})$ se obtiene un grupo $\mathcal{F}_U$ de aplicaciones de U en $\mathcal{F}$. La Proposición 5 muestra que, si $\mathcal{F}$ está dotado de una estructura de haz tal que $\mathcal{F}(Y) = \mathcal{G}$, se tiene que $\mathcal{F}_U = \Gamma(U, \mathcal{F})$, lo que prueba la unicidad de la estructura en cuestión. Su existencia se demuestra procediendo como en el nº 3 aplicado a $\mathcal{F}_U$ y a los morfismos de restricción $\varphi_U^V : \mathcal{F}_V \to \mathcal{F}_U$.

Diremos que el haz $\mathcal{F}$ se obtiene *extendiendo el haz $\mathcal{G}$ por 0 fuera de Y*; se denota por $\mathcal{G}^Y$, o por $\mathcal{G}$ cuando no cause confusión.

6. Haces de anillos y haces de módulos. La noción de haz definida en el nº 1 es la de haz de *grupos abelianos*. Está claro que existen definiciones análogas para toda estructura algebraica (también se pueden definir “haces de conjuntos”, donde $\mathcal{F}_x$ no está dotada de ninguna estructura algebraica, y donde solo se postula el axioma (I)). En lo que sigue, trataremos principalmente con haces de *anillos* y haces de *módulos*:

Un haz de anillos $\mathcal{A}$ es un haz de grupos abelianos $\mathcal{A}_x$, $x \in X$, donde cada $\mathcal{A}_x$ está dotado de una estructura de anillo tal que la aplicación $(f, g) \to f \cdot g$ sea una aplicacion continua de $\mathcal{A} + \mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$ (las notaciones son las del nº 1). Asumiremos siempre que cada $\mathcal{A}_x$ posee un elemento unidad, que varía de modo continuo con x.

Si $\mathcal{A}$ es un haz de anillos verificando la condición anterior, $\Gamma(U, \mathcal{A})$ es un anillo con unidad, y $\rho_U^V : \Gamma(V, \mathcal{A}) \to \Gamma(U, \mathcal{A})$ es un morfismo de anillos con unidad si $U \subset V$.

Recíprocamente, dados anillos con unidad $\mathcal{A}_U$ y morfismos de anillos con unidad $\rho_U^V : \mathcal{A}_V \to \mathcal{A}_U$, cumpliendo $\varphi_U^V \circ \varphi_V^W = \varphi_U^W$, entonces el haz $\mathcal{A}$ definido por el sistema $(\mathcal{A}_U, \varphi_U^V)$ es un haz de anillos. Por ejemplo, si G es un anillo con unidad, el haz de gérmenes de funciones con valores en G (definido en el nº 3) es un haz de anillos.

Sea $\mathcal{A}$ un haz de anillos. Un haz $\mathcal{F}$ se dice que es un *haz de $\mathcal{A}$-módulos* si cada $\mathcal{F}_x$ está dotado de una estructura de $\mathcal{A}_x$-módulo (por la izquierda, para fijar ideas), que varía "continuamente" con x, en el siguiente sentido: si $\mathcal{A}+\mathcal{F}$ es el subconjunto de $\mathcal{A}\times\mathcal{F}$ formado por las parejas (a, f) tales que $\pi(a) = \pi(f)$, la aplicación $(a, f) \to a \cdot f$ es una aplicación continua de $\mathcal{A}+\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}$.

Si $\mathcal{F}$ es un haz de $\mathcal{A}$-módulos, $\Gamma(U, \mathcal{F})$ es un módulo sobre $\Gamma(U, \mathcal{A})$. Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{A}$ está definido por el sistema $(\mathcal{A}_U, \varphi_U^V)$ como antes, y sea $\mathcal{F}$ el haz definido por el sistema $(\mathcal{F}_U, \psi_U^V)$, donde cada $\mathcal{F}_U$ es un $\mathcal{A}_U$-módulo, con $\psi_U^V(a \cdot f) = \varphi_U^V(a) \cdot \psi_U^V(f)$ para $a \in \mathcal{A}_V$, $f \in \mathcal{F}_V$; entonces $\mathcal{F}$ es un haz de $\mathcal{A}$-módulos.

Todo haz de grupos abelianos se puede considerar como haz de $\mathbb{Z}$-módulos, donde $\mathbb{Z}$ denota el haz constante isomorfo al anillo de los enteros. Esto nos permitirá limitarnos, en lo que sigue, a estudiar los haces de módulos.

7. Subhaz y haz cociente. Sean $\mathcal{A}$ un haz de anillos, $\mathcal{F}$ un haz de $\mathcal{A}$-módulos. Para cada $x \in X$, sea $\mathcal{G}_x$ un subconjunto de $\mathcal{F}_x$. Se dice que $\mathcal{G} = \bigcup \mathcal{G}_x$ es un *subhaz* de $\mathcal{F}$ si:

(a) $\mathcal{G}_x$ es un sub-$\mathcal{A}_x$-módulo de $\mathcal{F}_x$ para todo $x \in X$,
(b) $\mathcal{G}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}$.

La condición (b) se puede escribir también como:

(b') Si x es un punto de X, y s es una sección de $\mathcal{F}$ a lo largo de un entorno de x tal que $s(x) \in \mathcal{G}_x$, entonces $s(y) \in \mathcal{G}_y$ para cada y en cierto entorno de x.

Está claro que, si se verifican estas condiciones, $\mathcal{G}$ es un haz de $\mathcal{A}$-módulos. Sea $\mathcal{G}$ un subhaz de $\mathcal{F}$, y pongamos $\mathcal{H}_x = \mathcal{F}_x / \mathcal{G}_x$ para cada $x \in X$. Consideremos en $\mathcal{H} = \bigcup \mathcal{H}_x$ la topología cociente de la topología en $\mathcal{F}$; se ve fácilmente que hemos obtenido un haz de $\mathcal{A}$-módulos, llamado *haz cociente* de $\mathcal{F}$ por $\mathcal{G}$, y denotado por $\mathcal{F} / \mathcal{G}$. Se puede dar otra definición, procediendo como en el nº 3: si U es un abierto de X, ponemos $\mathcal{H}_U = \Gamma(U, \mathcal{F})/\Gamma(U, \mathcal{G})$, y tomemos como φ_U^V el morfismo definido pasando al cociente $\rho_U^V : \Gamma(V, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$. El haz definido por el sistema $(\mathcal{H}_U, \varphi_U^V)$ no es otro que $\mathcal{H}$.

Cualquiera de las dos definiciones muestra que, si s es una sección de $\mathcal{H}$ a lo largo de un entorno de x, existe una sección t de $\mathcal{F}$ en cierto entorno de x, tal que la clase de $t(y)$ módulo $\mathcal{G}_y$ es igual a $s(y)$ para cada y lo bastante cerca de x. Por supuesto, esto no es cierto globalmente en general: si U es un abierto de X, se tiene solamente la sucesión exacta:

$$0 \to \Gamma(U, \mathcal{G}) \to \Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{H}),$$

el morfismo $\Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{H})$ no es epiyectivo en general (ver el nº 24).

8. Morfismos de haces. Sean $\mathcal{A}$ un haz de anillos, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ haces de $\mathcal{A}$-módulos. Un *morfismo de haces de $\mathcal{A}$-módulos* (también se dice morfismo $\mathcal{A}$-lineal, o morfismo de haces) de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ es una familia de morfismos de $\mathcal{A}_x$-módulos $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ indexada por $x \in X$ tal que la aplicación $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ inducida por las φ_x sea continua. Esta condicion se puede expresar diciendo que, si s es una sección de $\mathcal{F}$ a lo largo de U, $x \to \varphi_x(s(x))$ es una sección de $\mathcal{G}$ a lo largo de U (sección que denotaremos por $\varphi(s)$, o $\varphi \circ s$). Por ejemplo, si $\mathcal{G}$ es un subhaz de $\mathcal{F}$, la inclusión $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ y la proyección $\mathcal{F} \to \mathcal{F} / \mathcal{G}$ son morfismos de haces.

Proposición 7. *Sea φ un morfismo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$. Para cada $x \in X$, sea $\mathcal{N}_x$ el núcleo de φ_x, y sea $\mathcal{I}_x$ la imagen de φ_x. Entonces $\mathcal{N} = \bigcup \mathcal{N}_x$ es un subhaz de $\mathcal{F}$, $\mathcal{I} = \bigcup \mathcal{I}_x$ es un subhaz de $\mathcal{G}$, y φ define un isomorfismo de $\mathcal{F} / \mathcal{N}$ en $\mathcal{I}$.*

Como φ_x es un morfismo de $\mathcal{A}_x$-módulos, $\mathcal{N}_x$ y $\mathcal{I}_x$ son submódulos de $\mathcal{F}_x$ y $\mathcal{G}_x$ respectivamente, y φ_x define un isomorfismo de $\mathcal{F}_x / \mathcal{N}_x$ en $\mathcal{I}_x$. Por otro lado, si s es una sección local de $\mathcal{F}$, tal que $s(x) \in \mathcal{N}_x$, se tiene que $\varphi \circ s(x) = 0$, luego $\varphi \circ s(y) = 0$ para y lo bastante cerca de x, así que $s(y) \in \mathcal{N}_y$, lo que prueba que $\mathcal{N}$ es un subhaz de $\mathcal{F}$. Si t es una sección local de $\mathcal{G}$ tal que $t(x) \in \mathcal{I}_x$, existe una sección local s de $\mathcal{F}$, tal que $\varphi \circ s(x) = t(x)$, luego $\varphi \circ s = t$ en un entorno de x, deduciéndose que $\mathcal{I}$ es un subhaz de $\mathcal{G}$, isomorfo a $\mathcal{F} / \mathcal{N}$.

El haz $\mathcal{N}$ se llama *núcleo* de φ, y se denota por $\ker(\varphi)$; el haz $\mathcal{I}$ se llama *imagen* de φ, y se denota por $\operatorname{Im}(\varphi)$; el haz $\mathcal{G} / \mathcal{I}$ se llama *conúcleo* de φ, y se denota por $\operatorname{Coker}(\varphi)$. Un morfismo de haces φ se dice *inyectivo* si cada uno de los φ_x es inyectivo, lo cual equivale a que $\ker(\varphi) = 0$; se dice *epiyectivo* si cada uno de los φ_x es epiyectivo, lo cual equivale a que $\operatorname{Coker}(\varphi) = 0$; se dice *biyectivo* si es a la vez inyectivo y epiyectivo, en cuyo caso la Proposición 7 demuestra que es un isomorfismo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$, y φ^{-1} es también un morfismo de haces. Todas las definiciones relativas a morfismos de módulos se pueden traducir a haces de módulos; por ejemplo, una sucesión de morfismos de haces se dice que es *exacta* si la imagen de cada morfismo coincide con el núcleo del morfismo siguiente.

Si $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de haces, las sucesiones:

$$0 \to \ker(\varphi) \to \mathcal{F} \to \operatorname{Im}(\varphi) \to 0$$
$$0 \to \operatorname{Im}(\varphi) \to \mathcal{G} \to \operatorname{Coker}(\varphi) \to 0$$

son sucesiones exactas.

Si φ es un morfismo de haces de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$, la aplicación $s \to \varphi \circ s$ es un morfismo de $\Gamma(U, \mathcal{A})$-módulos de $\Gamma(U, \mathcal{F})$ en $\Gamma(U, \mathcal{G})$. Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ vienen definidos por los sistemas $(\mathcal{A}_U, \varphi_U^V), (\mathcal{F}_U, \psi_U^V), (\mathcal{G}_U, \xi_U^V)$, al igual que en el nº 6, y demos para cada abierto $U \subset X$, un morfismo de $\mathcal{A}_U$-módulos $\varphi_U : \mathcal{F}_U \to \mathcal{G}_U$ tal que $\xi_U^V \circ \varphi_V = \varphi_U \circ \psi_U^V$; por paso al límite inductivo, los φ_U definen un morfismo de haces $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$.

9. Suma directa de haces. Sean $\mathcal{A}$ un haz de anillos, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ haces de $\mathcal{A}$-módulos; para cada $x \in X$, formamos el módulo $\mathcal{F}_x + \mathcal{G}_x$, *suma directa* de $\mathcal{F}_x$ y $\mathcal{G}_x$; un elemento de $\mathcal{F}_x + \mathcal{G}_x$ es una pareja (f, g), con $f \in \mathcal{F}_x$ y $g \in \mathcal{G}_x$. Sea $\mathcal{H}$ la unión disjunta de los $\mathcal{F}_x + \mathcal{G}_x$; se puede identificar $\mathcal{H}$ con el subconjunto de $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ formado por las parejas (f, g) tales que

$\pi(f) = \pi(g)$. Con la topología inducida en $\mathcal{H}$ por la de $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$, se verifica inmediatamente que $\mathcal{H}$ es un haz de $\mathcal{A}$-módulos; llamado *la suma directa* de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, denotado por $\mathcal{F} + \mathcal{G}$. Toda sección de $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ sobre un abierto $U \subset X$ es de la forma $x \to (s(x), t(x))$, donde s y t son secciones de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ sobre U; en otras palabras, $\Gamma(U, \mathcal{F} + \mathcal{G})$ es isomorfo a la suma directa $\Gamma(U, \mathcal{F}) + \Gamma(U, \mathcal{G})$.

La definición de suma directa se extiende por recurrencia a un número finito de $\mathcal{A}$-módulos. En particular, el haz suma directa de p haces isomorfos a un mismo haz $\mathcal{F}$ se denotará por $\mathcal{F}^p$.

10. Producto tensorial de haces Sean $\mathcal{A}$ un haz de anillos, $\mathcal{F}$ un haz de $\mathcal{A}$-módulos por la derecha, $\mathcal{G}$ un haz de $\mathcal{A}$-módulos por la izquierda. Para todo $x \in X$, pongamos $\mathcal{H}_x = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{A}_x} \mathcal{G}_x$, tomando el producto tensorial sobre el anillo $\mathcal{A}_x$ (ver por ejemplo [**6**], Cap. II, §2); sea $\mathcal{H}$ la unión disjunta de los $\mathcal{H}_x$.

Proposición 8. *Existe una única estructura de haz sobre el conjunto $\mathcal{H}$ tal que, si s y t son secciones de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ sobre un abierto U, la aplicación $x \to s(x) \otimes t(x) \in \mathcal{H}_x$ es una sección de $\mathcal{H}$ sobre U.*

El haz $\mathcal{H}$ así definido se llama producto tensorial (sobre $\mathcal{A}$) de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, y se denota por $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}$; si los $\mathcal{A}_x$ son conmutativos, es un haz de $\mathcal{A}$-módulos.

Si $\mathcal{H}$ está dotado de una estructura de haz verificando la condición del enunciado, y si s_i y t_i son secciones de $\mathcal{F}$ y de $\mathcal{G}$ a lo largo de un abierto $U \subset X$, la aplicación $x \to \sum s_i(x) \otimes t_i(x)$ es una sección de $\mathcal{H}$ sobre U. Ahora bien, todo $h \in \mathcal{H}_x$ se puede escribir de la forma $h = \sum f_i \otimes g_i$, $f_i \in \mathcal{F}$, $g_i \in \mathcal{G}$, luego también de la forma $\sum s_i(x) \otimes t_i(x)$, donde s_i y t_i son secciones definidas en un entorno U de x; resulta entonces que toda sección de $\mathcal{H}$ debe venir dada localmente por una sección de la forma anterior, lo que prueba la unicidad de la estructura de haz en $\mathcal{H}$.

Ahora probaremos la existencia. Podemos supoer que $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ están definidos por sistemas $(\mathcal{A}_U, \varphi_U^V)$, $(\mathcal{F}_U, \psi_U^V)$, $(\mathcal{G}_U, \xi_U^V)$ como en el nº 6. Pongamos entonces $\mathcal{H}_U = \mathcal{F}_U \otimes_{\mathcal{A}_U} \mathcal{G}_U$; los morfismos ψ_U^V y ξ_U^V definen, por paso al producto tensorial, un morfismo $\eta_U^V : \mathcal{H}_V \to \mathcal{H}_U$; por otro lado, se tiene que $\operatorname{lím}_{x \in U} \mathcal{H}_U = \operatorname{lím}_{x \in U} \mathcal{F}_U \otimes_{\mathcal{A}_x} \operatorname{lím}_{x \in U} \mathcal{G}_U = \mathcal{H}_x$ (por conmutación del producto tensorial con los límites inductivos, ver por ejemplo [**6**], Cap. VI, Ejer. 18). El haz definido por el sistema $(\mathcal{H}_U, \eta_U^V)$ se puede identificar con $\mathcal{H}$, y $\mathcal{H}$ queda provisto de una estructura de haz que visiblemente cumple con la condición impuesta. Finalmente, si los $\mathcal{A}_x$ son conmutativos, se puede suponer que los $\mathcal{A}_U$ también lo son (es suficiente tomar como $\mathcal{A}_U$ el anillo $\Gamma(U, \mathcal{A})$), luego $\mathcal{H}_U$ es un $\mathcal{A}_U$-módulo, y $\mathcal{H}$ es un haz de $\mathcal{A}$-módulos.

Sean ahora $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$, $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ morfismos de haces de $\mathcal{A}$-módulos; entonces $\varphi_x \otimes \psi_x$ es un morfismo (de grupos abelianos en general - de $\mathcal{A}_x$-módulos, si $\mathcal{A}_x$ es conmutativo), y la definición de $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}$ muestra que la colección de los $\varphi_x \otimes \psi_x$ es un morfismo de haces de $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}$ en $\mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}'$; este morfismo se denota por $\varphi \otimes \psi$; si ψ es la aplicación identidad, escribiremos φ en vez de $\varphi \otimes 1$.

Todas las propiedades usuales del producto tensorial de módulos se traducen al producto tensorial de haces de módulos. Por ejemplo, toda sucesión exacta:

$$\mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}'' \to 0$$

da lugar a otra sucesión exacta:

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G} \to \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G} \to \mathcal{F}'' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G} \to 0.$$

Se tienen isomorfismos canónicos:

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2) \cong \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}_1 + \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}_2, \quad \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A} \cong \mathcal{F},$$

y (suponiendo que los $\mathcal{A}_x$ son conmutativos, para simplificar las notaciones):

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G} \cong \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K}) \cong (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K}.$$

11. Haz de gérmenes de morfismos de haces. Sean $\mathcal{A}$ un haz de anillos, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ haces de $\mathcal{A}$-módulos. Si U es un abierto de X, sea $\mathcal{H}_U$ el grupo de morfismos de haces de $\mathcal{F}(U)$ en $\mathcal{G}(U)$ (diremos también "morfismo de haces de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ sobre U" en vez de "morfismo de haces de $\mathcal{F}(U)$ en $\mathcal{G}(U)$"). La operación de restricción define $\varphi_U^V : \mathcal{H}_V \to \mathcal{H}_U$; el haz definido por el sistema $(\mathcal{H}_U, \varphi_U^V)$ se llama *haz de gérmenes de morfismos* de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$, y se denota por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Si los $\mathcal{A}_x$ son conmutativos, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un haz de $\mathcal{A}$-módulos.

Un elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, al ser el germen de un morfismo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ en un entorno de x, define sin ambigüedad un morfismo de $\mathcal{A}_x$-módulos de $\mathcal{F}_x$ en $\mathcal{G}_x$; dando un morfismo canónico:

$$\rho : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_x}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$$

Pero, en contra de lo que pasaba con las operaciones estudiadas hasta ahora, el morfismo ρ no es en general biyectivo; daremos en el nº 14 una condición suficiente para que lo sea.

Si $\varphi : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ y $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ son morfismos, se define del modo evidente un morfismo:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\varphi, \psi) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}', \mathcal{G}').$$

Toda sucesión exacta: $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}' \to \mathcal{G}''$ da lugar a otra sucesión exacta:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}'').$$

Se tienen igualmente isomorfismos canónicos: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \mathcal{G}) \cong \mathcal{G}$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1) + \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_2)$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2, \mathcal{G}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}) + \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_2, \mathcal{G}).$$

§2. Haces de módulos coherentes

En esta sección, X denotará un espacio topológico, y $\mathcal{A}$ un haz de anillos sobre X. Supondremos que todos los $\mathcal{A}_x$, $x \in X$ son conmutativos con un elemento unidad que varía de modo continuo respecto a x. Todos los haces que consideremos hasta el nº 16 serán haces de $\mathcal{A}$-módulos, y todos los morfismos serán morfismos de haces de $\mathcal{A}$-módulos.

12. Definiciones. Sea $\mathcal{F}$ un haz de $\mathcal{A}$-módulos, y sean $s_1, \ldots, s_p$ secciones de $\mathcal{F}$ a lo largo de un abierto $U \subset X$. Si le hacemos corresponder a cada familia $f_1, \ldots, f_p$ de elementos de $\mathcal{A}_x$ el elemento $\sum_{i=1}^{i=p} f_i \cdot s_i(x)$, obtenemos un morfismo $\varphi : \mathcal{A}^p \to \mathcal{F}$, definido a lo largo del abierto U (más precisamente, φ es un morfismo de $\mathcal{A}^p(U)$ en $\mathcal{F}(U)$, con las notaciones del nº 4). El núcleo $\mathcal{R}(s_1, \ldots, s_p)$ del morfismo φ es un subhaz de $\mathcal{A}^p$, llamado *haz de relaciones* entre las s_i; la imagen de φ es el subhaz de $\mathcal{F}$ generado por las s_i. Recíprocamente, todo morfismo $\varphi : \mathcal{A}^p \to \mathcal{F}$ define secciones $s_1, \ldots, s_p$ de $\mathcal{F}$ por las fórmulas:

$$s_1(x) = \varphi_x(1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad s_p(x) = \varphi_x(0, \ldots, 0, 1).$$

Definición 1. *Un haz de $\mathcal{A}$-módulos $\mathcal{F}$ se dice que es de tipo finito si está localmente generado por un número finito de secciones.*

Equivalentemente, para cada $x \in X$, deben existir un abierto U incluyendo a x y un número finito de secciones $s_1, \ldots, s_p$ de $\mathcal{F}$ a lo largo de U, tales que todo elemento de $\mathcal{F}_y$, $y \in U$, sea combinación lineal, con coeficientes en $\mathcal{A}_y$, de las $s_i(y)$. Según lo anterior, es lo mismo que decir que la restricción de $\mathcal{F}$ a U es isomorfa a un haz cociente de $\mathcal{A}^p$.

Proposición 9. *Sea $\mathcal{F}$ un haz de tipo finito. Si $s_1, \ldots, s_p$ son secciones de $\mathcal{F}$, definidas en un entorno de cierto $x \in X$ y que generan $\mathcal{F}_x$, entonces generan $\mathcal{F}_y$ para todo y lo bastante cercano a x.*

Como $\mathcal{F}$ es de tipo finito, existe un número finito de secciones de $\mathcal{F}$ en un entorno de x, $t_1, \ldots, t_q$, que generan $\mathcal{F}_y$ para y suficientemente cercano a x. Dado que las $s_j(x)$ generan $\mathcal{F}_x$, existen secciones f_{ij} de $\mathcal{A}$ en un entorno de x tales que $t_i(x) = \sum_{i=1}^{i=p} f_{ij}(x) \cdot s_j(x)$; se deduce que, para y suficientemente cercano a x, se tiene:

$$t_i(y) = \sum_{j=1}^{j=p} f_{ij}(y) \cdot s_j(y),$$

lo que demuestra que los $s_j(y)$ generan $\mathcal{F}_y$, como queríamos demostrar.

Definición 2. *Un haz de $\mathcal{A}$-módulos $\mathcal{F}$ se dice que es coherente si:*

(a) *$\mathcal{F}$ es de tipo finito,*
(b) *Si $s_1, \ldots, s_p$ son secciones de $\mathcal{F}$ a lo largo de un abierto $U \subset X$, el haz de relaciones entre las s_i es un haz de tipo finito (sobre el abierto U).*

Observemos el carácter local de las definiciones 1 y 2.

Proposición 10. *Localmente, todo haz coherente es isomorfo al conúcleo de un morfismo* $\varphi : \mathcal{A}^q \to \mathcal{A}^p$

Esto resulta inmediatamente de las definiciones y los comentarios previos a la definición 1.

Proposición 11. *Todo subhaz de tipo finito de un haz coherente es un haz coherente.*

En efecto, si un haz $\mathcal{F}$ verifica la condición (b) de la definición 2, es evidente que todo subhaz de $\mathcal{F}$ la verifica también.

13. Propiedades de los haces coherentes

Teorema 1. *Sea* $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$ *una sucesión exacta de morfismos de haces. Si dos de los tres haces* $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ *son coherentes, el tercero también lo es.*

Supongamos que $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ son coherentes. Entonces existe localmente un morfismo epiyectivo $\gamma : \mathcal{A}^p \to \mathcal{G}$; sea $\mathcal{I}$ el núcleo de $\beta \circ \gamma$; como $\mathcal{H}$ es coherente, $\mathcal{I}$ es un haz de tipo finito (condición (b)); de modo que $\gamma(\mathcal{I})$ es un haz de tipo finito, luego coherente por la Proposición 11; como α es un isomorfismo de $\mathcal{F}$ en $\gamma(\mathcal{I})$, resulta entonces que $\mathcal{F}$ es coherente.

Supongamos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son coherentes. Como $\mathcal{G}$ es de tipo finito, $\mathcal{H}$ también es de tipo finito, y queda demostrar que $\mathcal{H}$ verifica la condición (b) de la definición 2. Sean $s_1, \ldots, s_p$ secciones de $\mathcal{H}$ sobre un entorno de cierto $x \in X$. Dado que la cuestión es local, podemos suponer que existen secciones $s'_1, \ldots, s'_p$ de $\mathcal{G}$ tales que $s_i = \beta(s'_i)$. Sean por otro lado $n_1, \ldots, n_q$ secciones de $\mathcal{F}$ sobre un entorno de x, que generen $\mathcal{F}_y$ para cada y suficientemente cercano a x. Para que una familia $f_1, \ldots, f_p$ de elementos de $\mathcal{A}_y$ pertenezca a $\mathcal{R}(s_1, \ldots, s_p)_y$, es necesario y suficiente que existan $g_1, \ldots, g_q \in \mathcal{A}_y$ tales que

$$\sum_{i=1}^{i=p} f_i \cdot s'_i = \sum_{j=1}^{j=q} g_j \cdot \alpha(n_j) \quad \text{en } y.$$

No obstante, el haz de relaciones entre las s'_i y las $\alpha(n_j)$ es de tipo finito, por ser $\mathcal{G}$ coherente. El haz $\mathcal{R}(s_1, \ldots, s_p)$, imagen del anterior por la proyección canónica de $\mathcal{A}^{p+q}$ en $\mathcal{A}^p$ es entonces de tipo finito, lo que demuestra que $\mathcal{H}$ es coherente.

Supongamos $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ coherentes. Como la cuestión es local, podemos suponer que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ están generados por secciones $n_1, \ldots, n_q$ y $s_1, \ldots, s_p$, respectivamente; por otra parte se puede suponer que existen secciones s'_i de $\mathcal{G}$ tales que $s_i = \beta(s'_i)$. Es claro entonces que las secciones s'_i y $\alpha(n_j)$ generan $\mathcal{G}$, lo que prueba que $\mathcal{G}$ es un haz de tipo finito. Sean ahora $t_1, \ldots, t_r$ secciones de $\mathcal{G}$ sobre un entorno de cierto x; como $\mathcal{H}$ es coherente, existen secciones f^i_j de $\mathcal{A}^r$ $(1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s)$, definidas sobre un entorno de x, y que generan el haz de relaciones entre los $\beta(t_i)$. Consideremos los $u_j = \sum_{i=1}^{i=r} f^i_j \cdot t_i$; puesto que $\sum_{i=1}^{i=r} f^i_j \cdot \beta(t_i) = 0$, los u_j están contenidos en $\alpha(\mathcal{F})$ y, como $\mathcal{F}$ es coherente, el haz de relaciones entre los u_j está generado, cerca de x, por un número finito de secciones, llamémoslas g^j_k $(1 \leq j \leq s, 1 \leq k \leq t)$. Veamos que los $\sum_{j=1}^{j=s} g^j_k \cdot f^i_j$ generan el haz $\mathcal{R}(t_1, \ldots, t_r)$ sobre un entorno de x; en efecto, si $\sum_{i=1}^{i=r} f_i \cdot t_i = 0$ en y, con $f_i \in \mathcal{A}_y$, se tiene que $\sum_{i=1}^{i=r} f_i \cdot \beta(t_i) = 0$, y existen $g_j \in \mathcal{A}_y$ con $f_i = \sum_{j=1}^{j=s} g_j \cdot f_j^i$; al escribir que $\sum_{i=1}^{i=r} f_i \cdot \beta(t_i) = 0$, se obtiene que $\sum_{j=1}^{j=s} g_j \cdot u_j = 0$, de ahí que las g_j son combinaciones lineales de las g_k^j, como queríamos demostrar. Se sigue que $\mathcal{G}$ verifica la condición (b), lo que concluye la demostración.

Corolario. *La suma directa de una familia finita de haces coherentes es un haz coherente.*

Teorema 2. *Sea φ un morfismo de un haz coherente $\mathcal{F}$ en un haz coherente $\mathcal{G}$. El núcleo, el conúcleo y la imagen de φ son también haces coherentes.*

Como $\mathcal{F}$ es coherente, $\mathrm{Im}(\varphi)$ es de tipo finito, luego coherente por la Proposición 11. Aplicando el Teorema 1 a las sucesiones exactas:

$$0 \to \ker(\varphi) \to \mathcal{F} \to \mathrm{Im}(\varphi) \to 0$$
$$0 \to \mathrm{Im}(\varphi) \to \mathcal{G} \to \mathrm{Coker}(\varphi) \to 0$$

se ve que $\ker(\varphi)$ y $\mathrm{Coker}(\varphi)$ son coherentes.

Corolario. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ subhaces coherentes de un haz coherente $\mathcal{H}$. Los haces $\mathcal{F}+\mathcal{G}$ y $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ son coherentes.*

Para $\mathcal{F}+\mathcal{G}$, resulta de la Proposición 11; en cuanto a $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$, es el núcleo de $\mathcal{F} \to \mathcal{H}/\mathcal{G}$.

14. Operaciones sobre haces coherentes Acabamos de ver que la suma directa de un número finito de haces coherentes es un haz coherente. Vamos a demostrar resultados análogos para los funtores $\otimes$ y Hom.

Proposición 12. *Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son haces coherentes, $\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{G}$ es un haz coherente.*

Según la Proposición 10, $\mathcal{F}$ es localmente isomorfo al conúcleo de un morfismo $\varphi : \mathcal{A}^q \to \mathcal{A}^p$; luego $\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{G}$ es localmente isomorfo al conúcleo de $\varphi : \mathcal{A}^q\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{G}$. Pero $\mathcal{A}^q\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{G}$ y $\mathcal{A}^p\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{G}$ son respectivamente isomorfos a $\mathcal{G}^q$ y a $\mathcal{G}^p$, que son coherentes (Corolario al Teorema 1). Luego $\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{G}$ es coherente (Teorema 2).

Proposición 13. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos haces, siendo $\mathcal{F}$ coherente. Para cada $x \in X$, el módulo puntual $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F},\mathcal{G})_x$ es isomorfo a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_x}(\mathcal{F}_x,\mathcal{G}_x)$.*

Más concretamente, probaremos que el morfismo:

$$\rho : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F},\mathcal{G})_x \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_x}(\mathcal{F}_x,\mathcal{G}_x),$$

definido en el nº 11, es biyectivo. Sea en primer lugar $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo definido en un entorno de x, y nulo sobre $\mathcal{F}_x$; dado que $\mathcal{F}$ es de tipo finito, se concluye inmediatamente que φ es nulo en un entorno de x, lo que prueba que ρ es inyectivo. Veamos que ρ es epiyectivo, dicho de otra manera, que si φ es un morfismo de $\mathcal{A}_x$-módulos de $\mathcal{F}_x$ en $\mathcal{G}_x$, existe un morfismo $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, definido en un entorno de x, tal que $\psi_x = \varphi$. Sean $m_1, \ldots, m_p$ un número finito de secciones de $\mathcal{F}$ en un entorno de x, generadoras de $\mathcal{F}_y$ para cada y lo bastante cerca de x, y sean f_j^i $(1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q)$ secciones de $\mathcal{A}^p$ generadoras de $\mathcal{R}(m_1, \ldots, m_p)$ en un entorno de x. Existen secciones locales de $\mathcal{G}$, llamémoslas $n_1, \ldots, n_p$, tales que $n_i(x) = \varphi(m_i(x))$. Escribiendo $p_j = \sum_{i=1}^{i=p} f_j^i \cdot n_i$, $1 \leq j \leq q$; las p_j son secciones locales de $\mathcal{G}$ que se anulan en x, luego en todos los puntos de un entorno U de x. Se sigue que, para $y \in U$, la fórmula $\sum f_i \cdot m_i(y) = 0$ con $f_i \in \mathcal{A}_y$, implica que $\sum f_i \cdot n_i(y) = 0$; para todo $m = \sum f_i \cdot m_i(y) \in \mathcal{F}_y$, se entonces poner:

$$\psi_y(m) = \sum_{i=1}^{i=p} f_i \cdot n_i(y) \in \mathcal{G}_y,$$

esta fórmula define $\psi_y(m)$ sin ambigüedad. La colección de los ψ_y, $y \in U$, constituye un morfismo $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, definido a lo largo de U, y tal que $\psi_x = \varphi$, lo que concluye la demostración.

Proposición 14. *Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son haces coherentes,* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *es un haz coherente.*

Como la cuestión es local, se puede suponer, según la Proposición 10, que se tiene una sucesión exacta: $\mathcal{A}^q \to \mathcal{A}^p \to \mathcal{F} \to 0$. Resulta entonces de la Proposición anterior que la sucesión:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^p, \mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^q, \mathcal{G})$$

es exacta. Ahora bien, el haz $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^p, \mathcal{G})$ es isomorfo a $\mathcal{G}^p$, luego es coherente, igual que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^q, \mathcal{G})$. El Teorema 2 muestra entonces que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es coherente.

15. Haces de anillos coherentes. El haz de anillos $\mathcal{A}$ se puede mirar como un haz de $\mathcal{A}$-módulos; si dicho haz de $\mathcal{A}$-módulos es coherente, diremos que $\mathcal{A}$ es un *haz de anillos coherente.* Como $\mathcal{A}$ es evidentemente de tipo finito, esto significa que $\mathcal{A}$ verifica la condición (b) de la Definición 2. Equivalentemente:

Definición 3. *El haz $\mathcal{A}$ es un haz de anillos coherente si el haz de relaciones entre un número finito de secciones de $\mathcal{A}$ a lo largo de un abierto U es un haz de tipo finito sobre U.*

Ejemplos. (1) Si X es una variedad analítica compleja, el haz de gérmenes de funciones holomorfas sobre X es un haz coherente de anillos, por un teorema de K. Oka (ver [**3**], exposé XV, o [**5**], §5),

(2) Si X es una variedad algebraica, el haz de anillos locales de X es un haz de anillos coherente (ver el nº 37, Proposición 1).

Cuando $\mathcal{A}$ es un haz de anillos coherente, se tienen los siguientes resultados:

Proposición 15. *Para que un haz de $\mathcal{A}$-módulos sea coherente, es necesario y suficiente que, localmente, sea isomorfo al conúcleo de un morfismo $\varphi : \mathcal{A}^q \to \mathcal{A}^p$.*

La necesidad no es más que la Proposición 10; la suficiencia resulta de que $\mathcal{A}^p$ y $\mathcal{A}^q$ son coherentes, y del Teorema 2.

Proposición 16. *Para que un subhaz de $\mathcal{A}^p$ sea coherente, es necesario y suficiente que sea de tipo finito.*

Es un caso particular de la Proposición 11.

Corolario. *El haz de relaciones entre un número finito de secciones de un haz coherente es un haz coherente.*

En efecto, dicho haz es de tipo finito, por definición de haces coherentes.

Proposición 17. *Sea $\mathcal{F}$ un haz coherente de $\mathcal{A}$-módulos. Para cada $x \in X$, sea $\mathcal{I}_x$ el ideal de $\mathcal{A}_x$ formado por los $a \in \mathcal{A}_x$ tales que $a \cdot f = 0$ para todo $f \in \mathcal{F}_x$. Los $\mathcal{I}_x$ forman un haz de ideales coherente (llamado anulador de $\mathcal{F}$).*

En efecto, es el núcleo del morfismo: $\mathcal{A}_x \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}_x}(\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_x)$; al que se aplican entonces las Proposiciones 13 y 14, y el Teorema 2.

Con mayor generalidad, el *conductor* $\mathcal{F} : \mathcal{G}$ de un haz coherente $\mathcal{G}$ en un subhaz coherente $\mathcal{F}$ es un haz de ideales coherente (es el anulador de $\mathcal{G} / \mathcal{F}$).

16. Cambio de anillos Las nociones de haz de tipo finito y de haz coherente dependen del haz de anillos $\mathcal{A}$ determinado. Cuando consideremos varios haces de anillos, diremos "de tipo finito sobre $\mathcal{A}$", "$\mathcal{A}$-coherente", para precisar que se trata de haces de $\mathcal{A}$-módulos.

Teorema 3. *Sean $\mathcal{A}$ un haz de anillos coherente e $\mathcal{I}$ un haz coherente de ideales de $\mathcal{A}$. Sea $\mathcal{F}$ un haz de $\mathcal{A}/\mathcal{I}$-módulos. Para que $\mathcal{F}$ sea $\mathcal{A}/\mathcal{I}$-coherente, es necesario y suficiente que sea $\mathcal{A}$-coherente. En particular, $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es un haz coherente de anillos.*

Está claro que "de tipo finito sobre $\mathcal{A}$" equivale a "de tipo finito sobre $\mathcal{A}/\mathcal{I}$". Por otro lado, si $\mathcal{F}$ es $\mathcal{A}$-coherente, y si $s_1, \dots, s_p$ son secciones de $\mathcal{F}$ sobre un abierto U, el haz de relaciones entre las s_i, con coeficientes en $\mathcal{A}$, es de tipo finito sobre $\mathcal{A}$; se sigue inmediatamente que el haz de relaciones entre las s_i, con coeficientes en $\mathcal{A}/\mathcal{I}$, es de tipo finito sobre $\mathcal{A}/\mathcal{I}$, porque es la imagen del anterior por la aplicación canónica $\mathcal{A}^p \to (\mathcal{A}/\mathcal{I})^p$. Luego $\mathcal{F}$ es $\mathcal{A}/\mathcal{I}$-coherente. En particular, puesto que $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es $\mathcal{A}$-coherente, también es $\mathcal{A}/\mathcal{I}$-coherente, dicho de otra manera, $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es un haz coherente de anillos. Recíprocamente, si $\mathcal{F}$ es $\mathcal{A}/\mathcal{I}$-coherente, es localmente isomorfo al conúcleo de un morfismo $\varphi; (\mathcal{A}/\mathcal{I})^q \to (\mathcal{A}/\mathcal{I})^p$, y como $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es $\mathcal{A}$-coherente, $\mathcal{F}$ es $\mathcal{A}$-coherente, por el Teorema 2.

17. Extensión y restricción de haces coherentes. Sea Y un subespacio cerrado del espacio X. Si $\mathcal{G}$ es un haz sobre Y, denotamos por $\mathcal{G}^X$ el haz obtenido prolongando $\mathcal{G}$ por 0 fuera de Y; que es un haz sobre X (ver el nº 5). Si $\mathcal{A}$ es un haz de anillos sobre Y, $\mathcal{A}^X$ es un haz de anillos sobre X, y, si $\mathcal{F}$ es un haz de $\mathcal{A}$-módulos, $\mathcal{F}^X$ es un haz de $\mathcal{A}^X$-módulos.

Proposición 18. *Para que $\mathcal{F}$ sea de tipo finito sobre $\mathcal{A}$, es necesario y suficiente que $\mathcal{F}^X$ sea de tipo finito sobre $\mathcal{A}^X$.*

Sea U un abierto de X, y sea $V = U \cap Y$. Todo morfismo $\varphi : \mathcal{A}^p \to \mathcal{F}$ sobre V define un morfismo $\varphi : (\mathcal{A}^X)^p \to \mathcal{F}^X$ sobre U, y recíprocamente; para que φ sea epiyectivo, es necesario y suficiente que φ^X lo sea. La proposición resulta inmediatamente de ello.

Igualmente se demuestra que:

Proposición 19. *Para que $\mathcal{F}$ sea $\mathcal{A}$-coherente, es necesario y suficiente que $\mathcal{F}^X$ sea $\mathcal{A}^X$-coherente.*

De lo cual, tomando $\mathcal{F} = \mathcal{A}$, se deduce que:

Corolario. *Para que $\mathcal{A}$ sea un haz coherente de anillos, es necesario y suficiente que $\mathcal{A}^X$ sea un haz coherente de anillos.*

§3. Cohomología con coeficientes en un haz

En esta sección, X será un espacio topológico, no necesariamente Hausdorff. Para abreviar, diremos *recubrimiento* de X en vez de recubrimiento abierto.

18. Cocadenas de un recubrimiento. Sea $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento de X. Si $s = (i_0, \dots, i_p)$ es una sucesión finita de elementos de I, pondremos:

$$U_s = U_{i_0 \dots i_p} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}.$$

Sea $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos sobre X. Si p es un entero ≥ 0, una *p-cocadena de U con valores en $\mathcal{F}$* es una aplicación f que asocia a cada sucesión $s = (i_0, \dots, i_p)$ de $p+1$ elementos de I una sección $f_s = f_{i_0 \dots i_p}$ de $\mathcal{F}$ a lo largo de $U_{i_0 \dots i_p}$. Las p-cocadenas forman un grupo abeliano, denotado por $C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$; es el grupo producto $\prod \Gamma(U_s, \mathcal{F})$, tomado sobre todas las sucesiones de $p+1$ elementos de I. La familia de los $C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ para $p = 0, 1, \dots,$ se denota por $C(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Una p-cocadena recibe también el nombre de cocadena de grado p.

Una p-cocadena f se dice que es *alternada* si:

(a) $f_{i_0 \dots i_p} = 0$ siempre que dos de los índices $i_0, \dots, i_p$ sean iguales.
(b) $f_{i_{\sigma 0} \dots i_{\sigma p}} = \varepsilon_\sigma f_{i_0 \dots i_p}$, si σ es una permutación del conjunto $\{0, \dots, p\}$ (siendo ε_σ el signo de σ).

Las p-cocadenas alternadas forman un subgrupo $C'^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ del grupo $C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$; la familia de los $C'^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ se denota por $C'(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

19. Operaciones simpliciales. Sea $S(I)$ el símplice cuyos vértices son los elementos de I; un símplice (ordenado) de $S(I)$ es una sucesión $s = (i_0, \dots, i_p)$ de elementos de I; diremos que p es la dimensión de s. Sea $K(I) = \sum_{p=0}^{\infty} K_p(I)$ el complejo definido por $S(I)$: por definición, $K_p(I)$ es el grupo libre generado por los símplices de dimensión p de $S(I)$.

Si s es un símplice de $S(I)$, denotaremos por $|s|$ el conjunto de los vértices de s. Una aplicación $h : K_p(I) \to K_q(I)$ se dice que es un *endomorfismo simplicial* si:

(I) h es un morfismo de grupos,
(II) Para todo símplice s de dimensión p de $S(I)$, se tiene

$$h(s) = \sum_{s'} c_s^{s'} \cdot s', \qquad \text{con} \quad c_s^{s'} \in \mathbb{Z},$$

la suma entendida sobre los símplices s' de dimensión q tales que $|s'| \subset |s|$.

Sea h un endomorfismo simplicial, y sea $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ una cocadena de grado q. Para todo símplice s de dimensión p, pongamos:

$$(h^t f)_s = \sum_{s'} c_s^{s'} \cdot \rho_s^{s'}(f_{s'}),$$

$\rho_s^{s'}$ denota el morfismo de restricción: $\Gamma(U_{s'}, \mathcal{F}) \to \Gamma(U_s, \mathcal{F})$, que tiene sentido porque $|s'| \subset |s|$. La aplicación $s \to (h^t f)_s$ es una p-cocadena, denotada por $h^t f$. La aplicación $f \to h^t f$ es un morfismo de grupos:

$$h^t : C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}),$$

y se verifican inmediatamente las fórmulas:

$$(h_1 + h_2)^t = h_1^t + h_2^t, \quad (h_1 \circ h_2)^t = h_2^t \circ h_1^t, \quad 1^t = 1.$$

Nota. En la práctica, omitiremos el símbolo $\rho_s^{s'}$ de restricción.

20. Los complejos de cocadenas. Apliquemos lo de antes al endomorfismo simplicial llamado *borde*

$$\partial : K_{p+1}(I) \to K_p(I),$$

definido por la fórmula usual:

$$\partial(i_0, \ldots, i_p) = \sum_{j=0}^{j=p+1} (-1)^j (i_0, \ldots, \hat{i}_j, \ldots, i_{p+1}),$$

el signo ˆ significa, como es costumbre, que el símbolo sobre el cual se encuentra debe omitirse.

Obtenemos así un morfismo $\partial^t : C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, que denotamos por d; por definición, se tiene que:

$$(df)_{i_0 \ldots i_p} = \sum_{j=0}^{j=p+1} (-1)^j \rho_j (f_{i_0 \ldots \hat{i}_j \ldots i_{p+1}}),$$

ρ_j denota el morfismo de restricción

$$\rho_j : \Gamma(U_{i_0 \ldots \hat{i}_j \ldots i_{p+1}}, \mathcal{F}) \to \Gamma(U_{i_0 \ldots i_{p+1}}, \mathcal{F}).$$

Como $\partial \circ \partial = 0$, se tiene que $d \circ d = 0$. Así que $C(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ está dotado de un operador coborde que lo convierte en un complejo. El q-ésimo grupo de cohomología del complejo $C(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ se denotará por $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Se tiene que:

Proposición 20. $H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$.

Una 0-cocadena es un sistema $(f_i)_{i\in I}$, siendo cada f_i una sección de $\mathcal{F}$ a lo largo de U_i; para que dicha cocadena sea un cociclo, es necesario y suficiente que $f_i - f_j = 0$ a lo largo de $U_i \cap U_j$, lo que significa que existe una sección de $\mathcal{F}$ sobre X que coincide con f_i sobre U_i, para cada $i \in I$. De ahí la Proposición.

(En consecuencia, $H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ no depende de $\mathfrak{U}$, lo que no es cierto en general para $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$).

Se comprueba inmediatamente que df es alternada cuando f lo es; dicho de otra manera, d deja estable $C'(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, que constituye un subcomplejo de $C(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Los grupos de cohomología de $C'(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ serán denotados por $H'^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

Proposición 21. *La inyeccion de $C'(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ en $C(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ define un isomorfismo de $H'^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ en $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ para todo $q \geq 0$.*

Dotemos al conjunto I de una estructura de orden total, y sea h el morfismo simplicial de $K(I)$ definido de la siguiente manera:

$h((i_0, \ldots, i_q)) = 0$ si dos de los índices $i_0, \ldots, i_q$ son iguales,

$h((i_0, \ldots, i_q)) = \varepsilon_\sigma(i_{\sigma 0}, \ldots, i_{\sigma q})$ si todos los índices son distintos y σ denota la permutación de $\{0, \ldots, q\}$ tal que $i_{\sigma 0} < i_{\sigma 1} < \ldots < i_{\sigma q}$.

Se verifica inmediatamente que h conmuta con ∂, y que $h(s) = s$ si $\dim(s) = 0$; en consecuencia (ver [**7**], Cap. VI, §5) existe un endomorfismo simplicial k, que eleva la dimensión una unidad, y tal que $1 - h = \partial \circ k + k \circ \partial$. Se deduce que, pasando a $C(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$,

$$1 - h^t = k^t \circ d + d \circ k^t.$$

Se tiene también que h^t es un *proyector*[2] de $C(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ sobre $C'(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$; como la fórmula anterior muestra que es un operador de homotopía, a Proposición queda demostrada. (Comparar con [**7**], Cap. VI, th. 6.10).

Corolario. $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ *para* $q > \dim(\mathfrak{U})$[3].

Por definición de $\dim(\mathfrak{U})$, se tiene que $U_{i_0 \ldots i_q} = \emptyset$ para $q > \dim(\mathfrak{U})$, si los índices $i_0, \ldots, i_q$ son distintos; por lo que $C'^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$, y se deduce que

$$H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = H'^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0.$$

21. Paso de un recubrimiento a otro más fino. Un recubrimiento $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ se dice que es *más fino* que otro recubrimiento $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ si existe una aplicación $\tau : I \to J$ tal que $U_i \subset V_{\tau i}$ para cada $i \in I$. Si $f \in C^q(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$, escribimos:

$$(\tau f)_{i_0 \ldots i_q} = \rho_U^V(f_{\tau i_0 \ldots \tau i_q}),$$

[2] N. del T.: Es decir, su imagen es $C'(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ y se cumple que $h^t \circ h^t = h^t$.

[3] N. del T.: La dimensión de un recubrimiento, en caso de existir, es el entero positivo n más pequeño tal que la intersección de $n + 1$ abiertos distintos del recubrimiento siempre es vacía.

siendo ρ_U^V el morfismo de restricción definido por la inclusión de $U_{i_0\dots i_q}$ en $V_{\tau i_0\dots\tau i_q}$. La aplicación $f \to \tau f$ es un morfismo de $C^q(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ en $C^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$, definido para todo $q \geq 0$, y conmuta con d, luego define morfismos en cohomología:

$$\tau^* : H^q(\mathfrak{V},\mathcal{F}) \to H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F}).$$

Proposición 22. *Los morfismos $\tau^* : H^q(\mathfrak{V},\mathcal{F}) \to H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ dependen solo de $\mathfrak{U}$ y de $\mathfrak{V}$, y no de la aplicación τ escogida.*

Sean τ y τ' dos aplicaciones de I en J tales que $U_i \subset V_{\tau i}$ y $U_i \subset V_{\tau' i}$; vamos a demostrar que $\tau^* = \tau'^*$.

Sea $f \in C^q(\mathfrak{V},\mathcal{F})$; pongamos

$$(kf)_{i_0\dots i_{q-1}} = \sum_{h=0}^{h=q-1} (-1)^h \rho_h (f_{\tau i_0\dots\tau i_h \tau' i_h \dots \tau' i_{q-1}}),$$

donde ρ_h designa el morfismo de restricción de $V_{\tau i_0\dots\tau i_h \tau' i_h \dots \tau' i_{q-1}}$ a $U_{i_0\dots i_{q-1}}$.

Se verifica por cálculo directo (ver [**7**], Cap. VI, §3) que se tiene:

$$dkf + kdf = \tau' f - \tau f,$$

lo que prueba la Proposición.

En consecuencia, si $\mathfrak{U}$ es más fino que $\mathfrak{V}$, existe para cada entero $q \geq 0$ un morfismo canónico de $H^q(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ en $H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$. En todo lo que sigue, denotaremos dicho morfismo por $\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V})$.

22. Grupos de cohomología de X con valores en el haz $\mathcal{F}$. La relación "$\mathfrak{U}$ es más fino que $\mathfrak{V}$"(que denotaremos por $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$) es una relación de *preorden* entre recubrimientos de X; más aún, dicha relación es *filtrante*, pues si $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ y $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ son dos recubrimientos, $\mathfrak{W} = \{U_i \cap V_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ es un recubrimiento que es a la vez más fino que $\mathfrak{U}$ y que $\mathfrak{V}$.

Diremos que dos recubrimientos $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{V}$ son equivalentes si se tiene que $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$ y $\mathfrak{V} \prec \mathfrak{U}$. Todo recubrimiento $\mathfrak{U}$ es equivalente a un recubrimiento $\mathfrak{U}'$ cuyo conjunto de índices es un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ (el conjunto de subconjuntos de X); en efecto, se puede tomar para $\mathfrak{U}'$ el conjunto de abiertos de X perteneciente a la *familia* $\mathfrak{U}$. Se puede entonces hablar del conjunto de clases de recubrimientos, por la relación de equivalencia anterior; es un conjunto ordenado filtrante[4].

Si $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$, tenemos un morfismo bien determinado $\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V}) : H^q(\mathfrak{V},\mathcal{F}) \to H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$, definido para todo entero $q \geq 0$ y todo haz $\mathcal{F}$ sobre X. Es claro que $\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{U})$ es la identidad, y que $\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V}) \circ \sigma(\mathfrak{V},\mathfrak{W}) = \sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{W})$ si $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V} \prec \mathfrak{W}$. Se sigue que, si $\mathfrak{U}$ es equivalente a $\mathfrak{V}$, $\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V})$ y $\sigma(\mathfrak{V},\mathfrak{U})$ son isomorfismos inversos; dicho de otra manera, $H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ solo depende de la clase del recubrimiento $\mathfrak{U}$.

[4]Por el contrario, no se puede hablar del "conjunto" de todos los recubrimientos, porque un recubrimiento es una familia cuyo conjunto de índices es arbitrario.

Definición 4. *Se llama q-ésimo grupo de cohomología de X con valores en el haz $\mathcal{F}$, y se denota por $H^q(X,\mathcal{F})$, al límite inductivo de los grupos $H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$, respecto del conjunto ordenado filtrante de las clases de recubrimientos de X a través de los morfismos $\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V})$.*

En otros términos, un elementos de $H^q(X,\mathcal{F})$ no es más que una pareja $(\mathfrak{U},x)$, con $x\in H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$, identificando dos parejas $(\mathfrak{U},x)$ y $(\mathfrak{V},y)$ si existe $\mathfrak{W}$ con $\mathfrak{W}\prec\mathfrak{U}$, $\mathfrak{W}\prec\mathfrak{V}$ y $\sigma(\mathfrak{W},\mathfrak{U})(x)=\sigma(\mathfrak{W},\mathfrak{V})(y)$ en $H^q(\mathfrak{W},\mathcal{F})$. A cada recubrimiento $\mathfrak{U}$ de X le queda asociado entonces un morfismo canónico $\sigma(\mathfrak{U}):H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})\to H^q(X,\mathcal{F})$.

Observamos que $H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ se puede definir también como el límite inductivo de los $H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ sobre una familia cofinal de recubrimientos $\mathfrak{U}$. Por ello, si X es compacto (resp. paracompacto), podemos limitarnos a considerar recubrimientos finitos (resp. localmente finitos).

Cuando $q=0$, se tiene, aplicando la Proposición 20:

Proposición 23. *$H^0(X,\mathcal{F})=\Gamma(X,\mathcal{F})$.*

23. Morfismos de haces. Sea $\varphi:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ un morfismo de haces. Si $\mathfrak{U}$ es un recubrimiento de X, asignamos a cada $f\in C^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ el elemento $\varphi f\in C^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ definido por la fórmula $(\varphi f)_s=\varphi(f_s)$. La aplicación $f\to\varphi f$ es un morfismo de $C(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ en $C(\mathfrak{U},\mathcal{G})$ que conmuta con el coborde, luego define morfismos $\varphi^*:H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})\to H^q(\mathfrak{U},\mathcal{G})$. Se tiene que $\varphi^*\circ\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V})=\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V})\circ\varphi^*$, lo que da, pasando al límite inductivo, morfismos de grupos:

$$\varphi^*:H^q(X,\mathcal{F})\to H^q(X,\mathcal{G}).$$

Cuando $q=0$, φ^* coincide con el morfismo de $\Gamma(X,\mathcal{F})$ en $\Gamma(X,\mathcal{G})$ definido naturalmente por φ.

En el caso general, los morfismos φ^* satisfacen las propiedades formales usuales:

$$(\varphi+\psi)^*=\varphi^*+\psi^*,\quad (\varphi\circ\psi)^*=\varphi^*\circ\psi^*,\quad 1^*=1.$$

En otros términos, para cada $q\geq 0$, $H^q(X,\mathcal{F})$ es un funtor covariante aditivo de $\mathcal{F}$. Resulta en particular que, si $\mathcal{F}$ es suma directa de dos haces $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$, $H^q(X,\mathcal{F})$ es suma directa de $H^q(X,\mathcal{G}_1)$ y de $H^q(X,\mathcal{G}_2)$.

Supongamos que $\mathcal{F}$ es un haz de $\mathcal{A}$-módulos. Toda sección de $\mathcal{A}$ sobre X define un endomorfismo de $\mathcal{F}$, luego endomorfismos de los $H^q(X,\mathcal{F})$. Se sigue que los $H^q(X,\mathcal{F})$ son módulos sobre el anillo $\Gamma(X,\mathcal{A})$.

24. Sucesión exacta de haces: caso general. Sea $0\to\mathcal{A}\xrightarrow{\alpha}\mathcal{B}\xrightarrow{\beta}\mathcal{C}\to 0$ una sucesión exacta de haces. Si $\mathfrak{U}$ es un recubrimiento de X, la sucesión

$$0\to C(\mathfrak{U},\mathcal{A})\xrightarrow{\alpha}C(\mathfrak{U},\mathcal{B})\xrightarrow{\beta}C(\mathfrak{U},\mathcal{C})$$

es evidentemente exacta, pero el morfismo β no es epiyectivo en general. Denotemos por $C_0(\mathfrak{U},\mathcal{C})$ la imagen de este morfismo; es un subcomplejo de $C(\mathfrak{U},\mathcal{C})$ y denotaremos sus grupos de cohomología por $H_0^q(\mathfrak{U},\mathcal{C})$. La sucesión exacta de complejos:

$$0 \to C(\mathfrak{U}, \mathcal{A}) \to C(\mathfrak{U}, \mathcal{B}) \to C_0(\mathfrak{U}, \mathcal{C}) \to 0,$$

da lugar a una sucesión exacta de cohomología:

$$\cdots \to H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{B}) \to H_0^q(\mathfrak{U}, \mathcal{C}) \xrightarrow{d} H^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{A}) \to H^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{B}) \to \ldots,$$

donde el operador coborde d se define del modo habitual.

Sean ahora $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ y $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ dos recubrimientos, y sea $\tau : I \to J$ una aplicación tal que $U_i \subset V_{\tau i}$; se tiene que $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$. El diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & C(\mathfrak{V}, \mathcal{A}) & \longrightarrow & C(\mathfrak{V}, \mathcal{B}) & \longrightarrow & C(\mathfrak{V}, \mathcal{C}) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \downarrow{\scriptstyle\tau} \\
0 & \longrightarrow & C(\mathfrak{U}, \mathcal{A}) & \longrightarrow & C(\mathfrak{U}, \mathcal{B}) & \longrightarrow & C(\mathfrak{U}, \mathcal{C})
\end{array}$$

muestra que τ aplica $C_0(\mathfrak{V}, \mathcal{C})$ en $C_0(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$, luego define morfismos en cohomología $\tau^* : H_0^q(\mathfrak{V}, \mathcal{C}) \to H_0^q(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$. Más aún, los morfismos τ^* son independientes de la elección de la aplicación τ: esto se debe a que, si $f \in C_0^q(\mathfrak{V}, \mathcal{C})$, se tiene que $kf \in C_0^{q-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$, con las notaciones de la Proposición 22. Se obtienen entonces morfismos canónicos $\sigma(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}) : H_0^q(\mathfrak{V}, \mathcal{C}) \to H_0^q(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$; se pueden también definir los $H_0^q(X, \mathcal{C})$ como límite inductivo sobre los $\mathfrak{U}$ de los grupos $H_0^q(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$.

Como el límite inductivo de sucesiónes exactas es una sucesión exacta, (ver [**7**], Cap. VIII, th. 5.4), se tiene:

Proposición 24. *La sucesión:*

$$\cdots \to H^q(X, \mathcal{B}) \xrightarrow{\beta^*} H_0^q(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{d} H^{q+1}(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{\alpha^*} H^{q+1}(X, \mathcal{B}) \to \ldots$$

es exacta.

(d designa el morfismo obtenido por paso al límite a partir de $d : H_0^q(\mathfrak{U}, \mathcal{C}) \to H^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{A})$).

Para aplicar la última Proposición, será conveniente comparar los grupos $H_0^q(X, \mathcal{C})$ y $H^q(X, \mathcal{C})$. La inyección de $C_0(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$ en $C(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$ define morfismos $H_0^q(\mathfrak{U}, \mathcal{C}) \to H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$, de ahí se deducen, pasando al límite sobre $\mathfrak{U}$, los morfismos:

$$H_0^q(X, \mathcal{C}) \to H^q(X, \mathcal{C}).$$

Proposición 25. *El morfismo canónico $H_0^q(X, \mathcal{C}) \to H^q(X, \mathcal{C})$ es biyectivo para $q = 0$ e inyectivo para $q = 1$.*

Primero demostraremos un lema:

Lema 1. *Sea $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ un recubrimiento, y sea $f = (f_j)$ un elemento de $C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{C})$. Existe un recubrimiento $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ y una aplicación $\tau : I \to J$ tales que $U_i \subset V_{\tau i}$ y que $\tau f \in C_0^0(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$.*

Para cada $x \in X$, escogemos $\tau x \in J$ tal que $x \in V_{\tau x}$. Como $f_{\tau x}$ es una sección de $\mathcal{C}$ a lo largo de $V_{\tau x}$, existe un entorno abierto U_x de x, contenido en $V_{\tau x}$, y una sección b_x de $\mathcal{B}$ a lo largo de U_x tales que $\beta(b_x) = f_{\tau x}$ sobre U_x. Las $\{U_x\}_{x \in X}$ forman un recubrimiento $\mathfrak{U}$ de X, y las b_x forman una 0-cocadena b de $\mathfrak{U}$ con valores en $\mathcal{B}$; como $\tau f = \beta(b)$, se tiene en efecto $\tau f \in C_0^0(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$.

Ahora probaremos que $H_0^1(X, \mathcal{C}) \to H^1(X, \mathcal{C})$ es inyectivo. Un elemento del núcleo de esta aplicación se puede representar por un 1-cociclo $z = (z_{j_0 j_1}) \in C_0'(\mathfrak{V}, \mathcal{C})$ tal que existe $f = (f_j) \in C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{C})$ con $df = z$; aplicando el Lema 1 a f, obtenemos un recubrimiento $\mathfrak{U}$ tal que $\tau f \in C_0^0(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$, lo cual implica que τz es cohomóloga a 0 en $C_0(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$, luego su imagen es 0 en $H_0^1(X, \mathcal{C})$. Se demuestra igualmente que $H_0^0(X, \mathcal{C}) \to H^0(X, \mathcal{C})$ es biyectivo.

Corolario. *Se tiene una sucesión exacta:*

$$0 \to H^0(X, \mathcal{A}) \to H^0(X, \mathcal{B}) \to H^0(X, \mathcal{C}) \to H^1(X, \mathcal{A}) \to H^1(X, \mathcal{B}) \to H^1(X, \mathcal{C}).$$

Es consecuencia de las Proposiciones 24 y 25.

Corolario. *Si $H^1(X, \mathcal{A}) = 0$, entonces $\Gamma(X, \mathcal{B}) \to \Gamma(X, \mathcal{C})$ es epiyectivo.*

25. Sucesión exacta de haces: caso en que X es Hausdorff paracompacto Recordamos que un espacio se dice paracompacto si todo recubrimiento de X admite un recubrimiento localmente finito más fino. Para un espacio X Hausdorff y paracompacto, se puede extender la Proposición 25 a todo valor de q (ignoro si tal extensión es posible para espacios que no sean de Hausdorff):

Proposición 26. *Si X es de Hausdorff y paracompacto, el morfismo canónico*

$$H_0^q(X, \mathcal{C}) \to H^q(X, \mathcal{C})$$

es biyectivo para todo $q \geq 0$.

La Proposición es una consecuencia inmediata del lema siguiente, análogo al Lema 1:

Lema 2. *Sea $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ un recubrimiento, y sea $f = (f_{j_0 \dots j_q})$ un elemento de $C^q(\mathfrak{V}, \mathcal{C})$. Existe un recubrimiento $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ y una aplicación $\tau : I \to J$ tales que $U_i \subset V_{\tau i}$ y que $\tau f \in C_0^q(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$.*

Como X es paracompacto, podemos asumir que $\mathfrak{V}$ es localmente finito. Entonces existe un recubrimiento $\{W_j\}_{j \in J}$ tal que $\overline{W}_j \subset V_j$. Para cada $x \in X$, escojamos un entorno abierto U_x de x tal que:

(a) Si $x \in V_j$ (resp. $x \in W_j$), se tiene que $U_x \subset V_j$ (resp. $U_x \subset W_j$),
(b) Si $U_x \cap W_j \neq \emptyset$, se tiene que $U_x \subset V_j$,
(c) Si $x \in V_{j_0 \dots j_q}$, existe una sección b de $\mathcal{B}$ sobre U_x tal que $\beta(b) = f_{j_0 \dots j_q}$ sobre U_x.

La condición (c) es factible, por la definición de haz cociente y el hecho de que x pertenece solo a un número finito de los $V_{j_0 \dots j_q}$. Una vez que se verifica (c), basta con restringir convenientemente U_x para satisfacer (a) y (b).

La familia de los $\{U_x\}_{x\in X}$ forma un recubrimiento $\mathfrak{U}$; para todo $x \in X$, escojamos $\tau x \in J$ tal que $x \in W_{\tau x}$. Veamos ahora que τf pertenece a $C_0^q(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$, dicho de otra forma, que $f_{\tau x_0 \dots \tau x_q}$ es imagen por β de una sección de $\mathcal{B}$ a lo largo de $U_{x_0} \cap \dots \cap U_{x_q}$. Si $U_{x_0} \cap \dots \cap U_{x_q}$ es vacío, es evidente; si no, se tiene que $U_{x_0} \cap U_{x_k} \neq \emptyset$ para $0 \leq k \leq q$, y como $U_{x_k} \subset W_{\tau x_k}$, se tiene que $U_{x_0} \cap W_{\tau x_k} \neq \emptyset$, lo que implica según (b) que $U_{x_0} \subset V_{\tau x_k}$, de ahí que $x_0 \in V_{\tau x_0 \dots \tau x_q}$; aplicando ahora (c), se ve que existe una sección b de $\mathcal{B}$ sobre U_{x_0} tal que $\beta(b) = f_{\tau x_0 \dots \tau x_q}$ sobre U_{x_0}, en particular sobre $U_{x_0} \cap \dots \cap U_{x_q}$, con lo que se concuye.

Corolario. *Si X es paracompacto, se tiene una sucesión exacta:*

$$\dots \to H^q(X, \mathcal{B}) \xrightarrow{\beta^*} H^q(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{d} H^{q+1}(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{\alpha^*} H^{q+1}(X, \mathcal{B}) \to \dots$$

(el operador d es el definido por la composición del inverso de $H_0^q(X, \mathcal{C}) \to H^q(X, \mathcal{C})$ con $d : H_0^q(X, \mathcal{C}) \to H^{q+1}(X, \mathcal{A})$).

La sucesión exacta anterior se llama la *sucesión exacta de cohomología* definida por la sucesión exacta de haces $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$ dada. Es válida, con mayor generalidad, siempre que se pueda demostrar que $H_0^q(X, \mathcal{C}) \to H^q(X, \mathcal{C})$ es biyectivo (veremos en el nº 47 que este es el caso cuando X es una variedad algebraica y $\mathcal{A}$ es un haz algebraico coherente).

26. Cohomología de un subespacio cerrado. Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre X y sea Y un subespacio de X. Sea $\mathcal{F}(Y)$ el haz inducido por $\mathcal{F}$ sobre Y, en el sentido del nº 4. Si $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de X, los $U'_i = Y \cap U_i$ forman un recubrimiento $\mathfrak{U}'$ de Y; si $f_{i_0 \dots i_q}$ es una sección de $\mathcal{F}$ a lo largo de $U_{i_0 \dots i_q}$, la restricción de $f_{i_0 \dots i_q}$ a $U'_{i_0 \dots i_q} = Y \cap U_{i_0 \dots i_q}$ es una sección de $\mathcal{F}(Y)$. La operación de restricción es un morfismo $\rho : C(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C(\mathfrak{U}', \mathcal{F}(Y))$, que conmuta con d, luego define morfismos $\rho^* : H^q(\mathfrak{U}', \mathcal{F}) \to H^q(\mathfrak{U}', \mathcal{F}(Y))$. Si $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$, se tiene que $\mathfrak{U}' \prec \mathfrak{V}'$, y $\rho^* \circ \sigma(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}) = \sigma(\mathfrak{U}', \mathfrak{V}') \circ \rho^*$; luego los morfismos ρ^* definen, pasando al límite sobre $\mathfrak{U}$, morfismos $\rho^* : H^q(X, \mathcal{F}) \to H^q(Y, \mathcal{F}(Y))$.

Proposición 27. *Supongamos que Y es cerrado en X, y que $\mathcal{F}$ es nulo fuera de Y. Entonces $\rho^* : H^q(X, \mathcal{F}) \to H^q(Y, \mathcal{F}(Y))$ es biyectivo para todo $q \geq 0$.*

La Proposición resulta de los dos hechos siguientes:

(a) Todo recubrimiento $\mathfrak{W} = \{W_i\}_{i\in I}$ de Y es de la forma $\mathfrak{U}'$, donde $\mathfrak{U}$ es un recubrimiento de X.

En efecto, basta poner $U_i = W \cup (X - Y)$, porque Y es cerrado en X.

(b) Para todo recubrimiento $\mathfrak{U}$ de X, $\rho : C(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C(\mathfrak{U}', \mathcal{F}(Y))$ es biyectivo.

En efecto, es resultado de la Proposición 5 del nº 5, aplicada a $U_{i_0 \dots i_q}$ y al haz $\mathcal{F}$.

Se puede reformular la Proposición 27 del modo siguiente: Si $\mathcal{G}$ es un haz sobre Y, y si $\mathcal{G}^X$ es el haz obtenido prolongando $\mathcal{G}$ por 0 fuera de Y, se tiene que $H^q(Y, \mathcal{G}) = H^q(X, \mathcal{G}^X)$ para todo $q \geq 0$; dicho de otra manera, la identificación de $\mathcal{G}$ con $\mathcal{G}^X$ es compatible con el paso a los grupos de cohomología.

§4. Grupos de cohomología asociados a recubrimientos distintos

En esta sección, X será un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un haz sobre X. Nos proponemos dar condiciones sobre un recubrimiento $\mathfrak{U}$ para que se cumpla $H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = H^n(X, \mathcal{F})$ para todo $n \geq 0$.

27. Bicomplejos. Un bicomplejo (ver [**6**], Cap. IV, §4) es un grupo abeliano bigraduado

$$K = \sum_{p,q} K^{p,q}, \quad p \geq 0, q \geq 0,$$

dotado de dos endomorfismos d' y d'' verificando las siguientes propiedades:

- d' aplica $K^{p,q}$ en $K^{p+1,q}$ y d'' aplica $K^{p,q}$ en $K^{p,q+1}$,
- $d' \circ d' = 0$, $d' \circ d'' + d'' \circ d' = 0$, $d'' \circ d'' = 0$.

Un elemento de $K^{p,q}$ se dice que es bihomogéneo de bigrado (p, q), y de grado total $p+q$. El endomorfismo $d = d' + d''$ cumple que $d \circ d = 0$, y los grupos de cohomología de K, dotado de este operador coborde, se denotarán por $H^n(K)$, siendo n el grado total.

Igualmente se puede dotar a K del operador coborde d'; como d' es compatible con la bigraduación de K, se obtienen entonces grupos de cohomología, que denotaremos $H_I^{p,q}(K)$; con d'', se tienen los grupos $H_{II}^{p,q}(K)$.

Denotaremos por K_{II}^q el subgrupo de $K^{0,q}$ formado por los elementos x tales que $d'(x) = 0$, y por K_{II} la suma directa de los K_{II}^q $(q = 0, 1, \dots)$. Definición análoga para $K_I = \sum_{p=0}^{\infty} K_I^p$. Observamos que:

$$K_{II}^q = H_I^{0,q}(K) \quad \text{y} \quad K_I^p = (H_{II}^{p,0}(K)).$$

K_{II} es un subcomplejo de K, y el operador d coincide sobre K_{II} con el operador d''.

Proposición 28. *Si $H_I^{p,q}(K) = 0$ para $p > 0$ y $q \geq 0$, la inyección $K_{II} \to K$ define una biyección de $H^n(K_{II})$ sobre $H^n(K)$ para todo $n \geq 0$.*

(Ver [**4**], exposé XVII-6, cuya demostración reproducimos a continuación).

Sustituyendo K por K/K_{II}, se reduce a demostrar que, si $H_I^{p,q}(K) = 0$ para $p \geq 0$ y $q \geq 0$, entonces $H^n(K) = 0$ para todo $n \geq 0$. Pongamos

$$K_h = \sum_{q \geq h} K^{p,q}.$$

Los K_h $(h = 0, 1, \dots)$ son subcomplejos anidados de K, y K_h/K_{h+1} es isomorfo a $\sum_{p=0}^{\infty} K^{p,h}$, dotado del operador coborde d'. Se tiene entonces $H^n(K_h/K_{h+1}) = H_I^{h,n-h}(K) = 0$ para cualesquiera n y h, de ahí que $H^n(K_h) = H^n(K_{h+1})$. Como $H^n(K_h) = 0$ si $h > n$, se deduce por recurrencia descendente sobre h, que $H^n(K_h) = 0$ para cualesquiera n y h, y como K_0 es igual a K, queda probada la Proposición,

28. Bicomplejo definido por dos recubrimientos. Sean $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ y $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ dos recubrimientos de X. Si s es un p-símplice de $S(I)$, y s' es un q-símplice de $S(J)$, designaremos por U_s la intersección de los U_i, $i \in |s|$ (ver nº 18), por $V_{s'}$ la intersección de los V_j, $j \in |s'|$, por $\mathfrak{V}_s$ el recubrimiento de U_s formado por los $\{U_s \cap V_j\}_{j\in J}$, y por $\mathfrak{U}_{s'}$ el recubrimiento de $V_{s'}$ formado por los $\{V_{s'} \cap U_i\}_{i\in I}$.

Definamos un bicomplejo $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}) = \sum_{p,q} C^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$ de la siguiente manera:

$C^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}) = \prod \Gamma(U_s \cap V_{s'}, \mathcal{F})$, el producto tomado sobre todas las parejas (s, s') donde s es un símplice de dimensión p de $S(I)$ y s' un símplice de dimensión q de $S(J)$.

Un elemento $f \in C^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$ es entonces una familia $(f_{s,s'})$ de secciones de $\mathcal{F}$ sobre los $U_s \cap V_{s'}$, y con las notaciones del nº 18, tenemos

$$f_{i_0\ldots i_p, j_0\ldots j_q} \in \Gamma(U_{i_0\ldots i_p} \cap V_{j_0\ldots j_q}, \mathcal{F}).$$

Se puede identificar también $C^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$ con $\prod_{s'} C^p(\mathfrak{U}_{s'}, \mathcal{F})$; como, para cada s', se tiene una operación de coborde $d : C^p(\mathfrak{U}_{s'}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathfrak{U}_{s'}, \mathcal{F})$ se deduce un morfismo

$$d_{\mathfrak{U}} : C^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}) \to C^{p+1,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}).$$

Al explicitar la definición de $d_{\mathfrak{U}}$, se obtiene:

$$(d_{\mathfrak{U}} f)_{i_0\ldots i_{p+1}, j_0\ldots j_q} = \sum_{k=0}^{k=p+1} (-1)^j \rho_k (f_{i_0\ldots \hat{i}_k \ldots i_{p+1}, j_0\ldots j_q}),$$

siendo ρ_k el morfismo de restricción definido por la inclusión de

$$U_{i_0\ldots i_{p+1}} \cap V_{j_0\ldots j_q} \quad \text{en} \quad U_{i_0\ldots \hat{i}_k \ldots i_{p+1}} \cap V_{j_0\ldots j_q}$$

Igualmente se define $d_{\mathfrak{V}} : C^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}) \to C^{p,q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$ y se tiene:

$$(d_{\mathfrak{V}} f)_{i_0\ldots i_p, j_0\ldots j_{q+1}} = \sum_{h=0}^{h=q+1} (-1)^h \rho_h (f_{i_0\ldots i_p, j_0\ldots \hat{j}_h \ldots j_{q+1}}),$$

Está claro que $d_{\mathfrak{U}} \circ d_{\mathfrak{U}} = 0$, $d_{\mathfrak{U}} \circ d_{\mathfrak{V}} = d_{\mathfrak{V}} \circ d_{\mathfrak{U}}$, $d_{\mathfrak{V}} \circ d_{\mathfrak{V}} = 0$. Al definir entonces $d' = d_{\mathfrak{U}}$, $d'' = (-1)^p d_{\mathfrak{V}}$, se establece en $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$ una estructura de bicomplejo. Ahora se pueden aplicar a $K = C(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$ las definiciones de la subsección anterior; los grupos cuyos compejos designábamos en el caso general por $H^n(K)$, $H_I^{p,q}(K)$, $H_{II}^{p,q}(K)$, K_I, K_{II}, se denotarán aquí $H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$, $H_I^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$, $H_{II}^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$ $C_I(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$ y $C_{II}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$ respectivamente.

Viendo las definiciones de d' y d'', se tiene inmediatamente:

PROPOSICIÓN 29. *$H_I^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$ es isomorfo a $\prod_{s'} H^p(\mathfrak{U}_{s'}, \mathcal{F})$, el producto tomado sobre todos los símplices de dimensión q de $S(J)$. En particular,*

$$C_{II}^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}) = H_I^{0,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$$

es isomorfo a $\prod_{s'} H^0(\mathfrak{U}_{s'}, \mathcal{F}) = C^q(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$.

Denotaremos por ι'' el isomorfismo canónico: $C(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \to C_{II}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$. Si $(f_{j_0 \dots j_q})$ es un elemento de $C^q(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$, se tiene entonces:

$$(\iota'' f)_{i_0, j_0 \dots j_q} = \rho_{i_0}(f_{j_0 \dots j_q}),$$

siendo ρ_{i_0} el morfismo de restricción definido por la inclusión de

$$U_{i_0} \cap V_{j_0 \dots j_q} \quad \text{en} \quad V_{j_0 \dots j_q}.$$

Por supuesto, un resultado análogo a la Proposición 29 vale para $H_{II}^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$, y se tiene un isomorfismo $\iota' : C(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C_I(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$.

29. Aplicaciones. Con las mismas notaciones de la subsección precedente, se tiene:

PROPOSICIÓN 30. *Supongamos que* $H^p(\mathfrak{U}_{s'}, \mathcal{F}) = 0$ *para todo* s' *y todo* $p > 0$. *Entonces el morfismo* $H^n(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \to H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$, *definido por* ι'', *es biyectivo para todo* $n \geq 0$.

Es una consecuencia inmediata de las Proposiciones 28 y 29.

Antes de enunciar la Proposición 31, demostremos un lema:

LEMA 3. *Sea* $\mathfrak{W} = \{W_i\}_{i \in I}$ *un recubrimiento de un espacio* Y, *y sea* $\mathcal{F}$ *un haz sobre* Y. *Si existe* $i \in I$ *tal que* $W_i = Y$, *entonces* $H^p(\mathfrak{W}, \mathcal{F}) = 0$ *para todo* $p > 0$.

Sea $\mathfrak{W}'$ el recubrimiento de Y formado por el único abierto Y; se tiene evidentemente $\mathfrak{W} \prec \mathfrak{W}'$, y la hipótesis sobre $\mathfrak{W}$ impica que $\mathfrak{W}' \prec \mathfrak{W}$. Resulta entonces (nº 22) que $H^p(\mathfrak{W}, \mathcal{F}) = H^p(\mathfrak{W}', \mathcal{F}) = 0$ si $p > 0$.

PROPOSICIÓN 31. *Supongamos que el recubrimiento* $\mathfrak{V}$ *es más fino que el recubrimiento* $\mathfrak{U}$. *Entonces* $\iota'' : H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^n(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ *es biyectivo para todo* $n \geq 0$. *Más aún, el morfismo* $\iota' \circ \iota''^{-1} : H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^n(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ *coincide con el morfismo* $\sigma(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$ *del nº 21.*

Al aplicar el Lema 3 a $\mathfrak{W} = \mathfrak{U}_{s'}$ y $Y = V_{s'}$, se ve que $H^p(\mathfrak{U}_{s'}, \mathcal{F}) = 0$ para todo $p > 0$, y la Proposición 30 muestra entonces que

$$\iota'' : H^n(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \to H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$$

es biyectivo para cada $n \geq 0$.

Sea $\tau : J \to I$ una aplicación tal que $V_j \subset U_{\tau j}$; para demostrar la segunda parte de la Proposición, falta ver que, si f es un n-cociclo de $C(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, los cociclos $\iota'(f)$ y $\iota''(\tau f)$ son cohomólogos en $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$.

Para cada entero p, $0 \leq p \leq n-1$, definamos $g^p \in C^{p, n-p-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$ por la siguiente fórmula:

$$g^p_{i_0 \dots i_p, j_0 \dots j_{n-p-1}} = \rho_p(f_{i_0 \dots i_p \tau j_0 \dots \tau j_{n-p}}),$$

siendo ρ_p el morfismo de restricción definido por la inclusión de

$$U_{i_0\dots i_p}\cap V_{j_0\dots j_{n-p-1}} \quad \text{en} \quad U_{i_0\dots i_p \tau j_0 \dots \tau j_{n-p-1}}.$$

Se verifica por cálculo directo (usando que f es un cociclo) que se tiene:

$$d''(g^0)=\iota''(\tau f),\dots d''(g^p)=d'(g^{p-1}),\dots,d'(g^{n-1})=(-1)^n\iota'(f)$$

de ahí que $d(g^0-g^1+\dots+(-1)^{n-1}g^{n-1})=\iota''(\tau f)-\iota'(f)$, lo que demuestra que $\iota''(\tau f)$ y $\iota'(f)$ son cohomólogas.

Proposición 32. *Supongamos que $\mathfrak{V}$ es más fino que $\mathfrak{U}$, y que $H^q(\mathfrak{V}_s,\mathcal{F})=0$ para todo s y todo $q>0$. Entonces el morfismo $\sigma(\mathfrak{V},\mathfrak{U}):H^n(\mathfrak{U},\mathcal{F})\to H^n(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ es biyectivo para todo $n\geq 0$.*

Si se aplica la Proposición 30 al permutar los papeles de $\mathfrak{U}$ y de $\mathfrak{V}$, se ve que ι' : $H^n(\mathfrak{V},\mathcal{F})\to H^n(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathcal{F})$ es biyectivo. La Proposición resulta entonces directamente de la Proposición 31.

Teorema 4. *Sean X un espacio topológico, $\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de X y $\mathcal{F}$ un haz sobre X. Supongamos que existe una familia $\mathfrak{V}^\alpha$, $\alpha\in A$, de recubrimientos de X verificando las dos condiciones siguientes:*

(a) Para todo recubrimiento $\mathfrak{W}$ de X, existe $\alpha\in A$ tal que $\mathfrak{V}^\alpha\prec\mathfrak{W}$.

(b) $H^q(\mathfrak{V}^\alpha_s,\mathcal{F})=0$ para todo $\alpha\in A$, todo símplice s de $S(I)$, y todo $q>0$.

Entonces $\sigma(\mathfrak{U}):H^n(\mathfrak{U},\mathcal{F})\to H^n(X,\mathcal{F})$ es biyectivo para todo $n\geq 0$.

Como los $\mathfrak{V}^\alpha$ son arbitrariamente finos, podemos suponer que son más finos que $\mathfrak{U}$. En ese caso el morfismo

$$\sigma(\mathfrak{V}^\alpha,\mathfrak{U}):H^n(\mathfrak{U},\mathcal{F})\to H^n(\mathfrak{V}^\alpha,\mathcal{F})$$

es biyectivo para todo $n\geq 0$, por la Proposición 32. Como los $\mathfrak{V}^\alpha$ son arbitrariamente finos, $H^n(X,\mathcal{F})$ es límite inductivo de los $H^n(\mathfrak{V}^\alpha,\mathcal{F})$, y se deduce inmediatamente el teorema.

Observaciones. (1) Se puede demostrar que el Teorema 4 sigue siendo válido cambiando la condición (b) por la siguiente condición más débil:

(b') $\lim_\alpha H^q(\mathfrak{V}^\alpha_s,\mathcal{F})=0$ para todo símplice s de $S(I)$ y todo $q>0$.

(2) El Teorema 4 es análogo a un teorema de Leray sobre recubrimientos acíclicos. Ver [**10**] y [**4**], exposé XVII-7.

Capítulo II. Variedades algebraicas - Haces algebraicos coherentes sobre variedades afines

Durante el resto del artículo, K será un cuerpo conmutativo algebraicamente cerrado de característica cualquiera.

§1. Variedades algebraicas

30. Espacios noetherianos. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es *noetheriano*[5] si toda sucesión decreciente de cerrados de X estaciona. Es decir, si se tiene que $F_1 \supset F_2 \supset \dots$, siendo los F_i cerrados en X, entonces existe un entero n tal que $F_m = F_n$ para $m \geq n$. Esto equivale a que el conjunto de cerrados de X, ordenado por inclusión, verifica la condición minimal.

Ejemplos. Dotemos a un conjunto de X de la topología cuyos cerrados son los subconjuntos finitos de X y el propio X; con ella X es un espacio topológico noetheriano. En general, toda variedad algebraica, dotada de la topología de Zariski, es noetheriana (ver nº 34).

Proposición 33. *(a) Si X es noetheriano, entonces es compacto.*

(b) Si X es noetheriano, cualquier subconjunto suyo también lo es.

(c) Si X es unión de una familia finita Y_i de subespacios noetherianos, entonces X es noetheriano.

Si F_i es un conjunto filtrante decreciente de cerrados de X y X es noetheriano, existe un F_i contenido en todos los demás; si $\cap F_i = \emptyset$ hay algún i tal que $F_i = \emptyset$, lo que demuestra (a).

Sea $G_1 \supset G_2 \supset \dots$ una sucesión decreciente de cerrados de un subespacio Y de X; si X es noetheriano, existe un n tal que $\overline{G}_m = \overline{G}_n$ para $m \geq n$, de ahí que $G_m = Y \cap \overline{G}_m = Y \cap \overline{G}_n = G_n$, lo que prueba (b).

Sea $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ una sucesión decreciente de cerrados de un espacio X verificando (c); como los Y_i son noetherianos, existe para cada i un n_i tal que $F_m \cap Y_i = F_{n_i} \cap Y_i$ para $m \geq n_i$; si $n = \sup(n_i)$, se tiene entonces que $F_m = F_n$ si $m \geq n$, lo que demuestra (c).

Un espacio X se dice *irreducible* si no es unión de dos cerrados estrictamente incluidos en sí mismo; esto equivale a que dos abiertos no vacíos cualesquiera de X tienen intersección no vacía. Toda familia finita de abiertos no vacíos de X tiene entonces intersección no vacía, y todo abierto de X es también irreducible.

Proposición 34. *Todo espacio noetheriano X es unión de un conjunto finito de cerrados irreducibles Y_i. Si se supone además que Y_i no está contenido en Y_j para cada pareja $(i, j), i \neq j$, el conjuntos de los Y_i está determinado de manera única por X; los Y_i así definidos se conocen como las componentes irreducibles de X.*

[5] N. del T.: En el artículo original se llamaba “espacio con la propiedad (A)” a lo que aquí hemos llamado espacio noetheriano.

La existencia de una descomposición $X = \bigcup Y_i$ resulta evidente por la definición de espacio noetheriano. Si Z_k es otra descomposición de X, se tiene que $Y_i = \bigcup Y_i \cap Z_k$, y como Y_i es irreducible, ello implica la existencia de un índice k tal que $Z_k \supset Y_i$; invirtiendo los papeles de Y_i y Z_k, se deduce la existencia de un índice i' tal que $Y_{i'} \supset Z_k$; de ahí que $Y_i \subset Z_k \subset Y_{i'}$, lo que, por hipótesis sobre los Y_i, implica que $i = i'$ y $Y_i = Z_k$, dando la unicidad de la descomposición.

PROPOSICIÓN 35. *Sea X un espacio topológico, unión de una familia finita de abiertos no vacíos V_i. Para que X sea irreducible, es necesario y suficiente que los V_i sean irreducibles y que $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ para toda pareja (i, j).*

La necesidad de las condiciones ha sido señalada más arriba; mostremos que son suficientes. Si $X = Y \cup Z$, con Y y Z cerrados, se tiene que $V_i = (V_i \cap Y) \cup (V_i \cap Z)$, lo que prueba que cada V_i está contenido en Y o en Z. Supongamos que Y y Z son distintos de X; entonces podemos escoger dos índices i, j tales que V_i no está contenido en Y y V_j no está contenido en Z; de lo anterior se sigue que $V_i \subset Z$ y $V_j \subset Y$. Sea $T = V_j - V_i \cap V_j$; T es cerrado en V_j, y se tiene $V_j = T \cup (Z \cap V_j)$; como V_j es irreducible, ello implica que $T = V_j$, luego $V_i \cap V_j = \emptyset$, o bien implica que $Z \cap V_j = V_j$, luego $V_j \subset Z$, y en ambos casos se llega a una contradicción.

31. Subconjuntos localmente cerrados del espacio afín. Sea r un entero ≥ 0, y sea $X = K^r$ el *espacio afín* de dimensión r sobre el cuerpo K. Dotaremos a X de la *topología de Zariski*; recordamos que un subconjunto de X es cerrado en esta topología si es el conjunto de los ceros comunes a una familia de polinomios $P^\alpha \in K[X_1, \ldots, X_r]$. Como el anillo de polinomios es noetheriano, X es un espacio noetheriano; además, se demuestra fácilmente que X es un espacio irreducible.

Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es un punto de X, denotaremos por $\mathcal{O}_x$ al *anillo local* de x; recordamos que es el subanillo del cuerpo $K(X_1, \ldots, X_n)$ formado por las fracciones racionales R que se pueden escribir de la forma:

$R = P/Q$, donde P y Q son polinomios y $Q(x) \neq 0$.

Una tal fracción racional se dice que es *regular* en x; en todo punto $x \in X$ donde $Q(x) \neq 0$, la función $x \to P(x)/Q(x)$ es una función continua con valores en K (considerando en K la topología de Zariski) que podemos identificar con R cuando el cuerpo K sea infinito. Los $\mathcal{O}_x$, $x \in X$ forman entonces un subhaz $\mathcal{O}$ del haz $\mathcal{F}(X)$ de gérmenes de funciones sobre X con valores en K (ver nº 3); el haz $\mathcal{O}$ es un haz de anillos.

Vamos a extender lo que precede a subespacios localmente cerrados de X (diremos que un subconjunto de X es *localmente cerrado* en X si es la intersección de un abierto y un cerrado en X). Sea Y un tal subespacio, y sea $\mathcal{F}(Y)$ el haz de gérmenes de funciones sobre Y con valores en K; si x es un punto de Y, la operación de restricción de funciones define un morfismo canónico

$$\varepsilon_x : \mathcal{F}(X)_x \to \mathcal{F}(Y)_x$$

La imagen de $\mathcal{O}_x$ por ε_x es un subanillo de $\mathcal{F}(Y)_x$, que denotaremos por $\mathcal{O}_{x,Y}$; los $\mathcal{O}_{x,Y}$ forman un subhaz $\mathcal{O}_Y$ de $\mathcal{F}(Y)$, el llamado *haz de anillos locales* de Y. Una sección de $\mathcal{O}_Y$ sobre un abierto V de Y es, por definición, una aplicación $f : V \to K$ que es igual, en un entorno de cada punto $x \in V$, a la restricción a V de una función racional regular en x; una tal función f se dirá que es *regular* sobre V; es una función continua considerando en V la topología inducida por la de X, y en K la topología de Zariski. El conjunto de las funciones regulares en todo punto de V es un anillo, el anillo $\Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$; observamos igualmente que, si $f \in \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$ y $f(x) \neq 0$ para todo $x \in V$, entonces $1/f$ también pertenece a $\Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$.

Se puede caracterizar de otra manera el haz $\mathcal{O}_Y$:

Proposición 36. *Sea U (resp. F) un abierto (resp. cerrado) de X, y sea $Y = U \cap F$. Sea $I(F)$ el ideal de $K[X_1, \ldots X_r]$ formado por los polinomios nulos sobre F. Si x es un punto de Y, el núcleo de la proyección $\varepsilon : \mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_{x,Y}$ coincide con el ideal $I(F) \cdot \mathcal{O}_x$ de $\mathcal{O}_x$.*

Es claro que todo elemento de $I(F) \cdot \mathcal{O}_x$ pertenece al núcleo de ε_x. Recíprocamente, sea $R = P/Q$ un elemento de este núcleo, siendo P y Q polinomios con $Q(x) \neq 0$. Por hipótesis, existe un entorno abierto W de x tal que $P(y) = 0$ para todo $y \in W \cap F$; sea F' el complementario de W, que es cerrado en X; como $x \notin F'$, por la definición de la topología de Zariski existe un polinomio P_1 nulo sobre F' y no nulo en x; el polinomo $P \cdot P_1$ pertenece entonces a $I(F)$, y se puede escribir $R = P \cdot P_1/Q \cdot P_1$, lo que demuestra que $R \in I(F) \cdot \mathcal{O}_x$.

Corolario. *El anillo $\mathcal{O}_{x,Y}$ es isomorfo al anillo de fracciones de $K[X_1, \ldots, X_r]/I(F)$ relativo al ideal maximal definido por el punto x.*

Se deduce inmediatamente de la construcción del anillo de fracciones de un anillo cociente (ver por ejemplo [**8**], Cap. XV, §5, th. XI).

32. Aplicaciones regulares. Sea U (resp. V) un subespacio localmente cerrado de K^r (resp. K^s). Una aplicación $\varphi : U \to V$ se dice que es *regular* sobre U (o simplemente regular) si:

(a) *φ es continua,*

(b) *Si $x \in U$, y si $f \in \mathcal{O}_{\varphi(x),V}$, entonces $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_{x,U}$.*

Designemos las coordenadas del punto $\varphi(x)$ como $\varphi_i(x)$, $1 \leq i \leq s$. Se tiene entonces:

Proposición 37. *Para que $\varphi : U \to V$ sea regular sobre U, es necesario y suficiente que las $\varphi_i : U \to K$ sean regulares sobre U para cada i, $1 \leq i \leq s$.*

Como las funciones coordenadas son regulares en V, la condición es necesaria. Recíprocamente, supongamos que $\varphi_i \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ para todo i; si $P(X_1, \ldots X_s)$ es un polinomio, la función $P(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$ pertenece a $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ porque $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ es un anillo; se sigue que es continua sobre U, luego el conjunto de sus ceros es cerrado, lo que prueba la continuidad de φ. Si se tiene que $x \in U$ y $f \in \mathcal{O}_{\varphi(x),V}$, la f se puede escribir localmente de la forma $f = P/Q$, siendo P y Q polinomios con $Q(\varphi(x)) \neq 0$. La función $f \circ \varphi$ es entonces igual a $P \circ \varphi/Q \circ \varphi$ en un entorno de x; según acabamos de ver, $P \circ \varphi$ y $Q \circ \varphi$ son regulares en un entorno de x; como $Q \circ \varphi(x) \neq 0$, resulta que $f \circ \varphi$ es regular en un entorno de x, lo que concluye la demostración.

La *composición* de dos aplicaciones regulares es regular. Una biyeccion $\varphi : U \to V$ se dice que es un *isomorfismo birregular* (o simplemente un isomorfismo) si φ y φ^{-1} son aplicaciones regulares; esto equivale a que φ sea un homeomorfismo de U con V que transforme el haz $\mathcal{O}_U$ en el haz $\mathcal{O}_V$.

33. Productos. Si r y r' son enteros ≥ 0, identificaremos el espacio afín $K^{r+r'}$ con el producto $K^r \times K^{r'}$. La topología de Zariski de $K^{r+r'}$ es más fina que la topología producto de las topologías de Zariski en K^r y en $K^{r'}$; la inclusión es estricta si tanto r como r' son > 0. Resulta que, si U y U' son subespacios localmente cerrados de K^r y de $K^{r'}$, $U \times U'$ es un subespacio localmente cerrado de $K^{r+r'}$, y el haz $\mathcal{O}_{U\times U'}$ está bien definido.

Sea por otro lado W un subespacio localmente cerrado de K^t, $t \geq 0$, y sean $\varphi : W \to U$ y $\varphi' : W \to U'$ dos aplicaciones. Resulta inmediatamente de la Proposición 37 que se tiene:

Proposición 38. *Para que la aplicación $x \to (\varphi(x), \varphi'(x))$ sea una aplicación regular de W en $U \times U'$, es necesario y suficiente que φ y φ' sean regulares.*

Como toda aplicación *constante* es regular, la Proposición anterior muestra que toda *sección* $x \to (x, x'_0)$, $x'_0 \in U'$, es una aplicación regular de U en $U \times U'$; por otro lado, las *proyecciones* $U \times U' \to U$ y $U \times U' \to U'$ son evidentemente regulares.

Sean V y V' subespacios localmente cerrados de K^s y $K^{s'}$, y sean $\psi : U \to V$ y $\psi' : U' \to V'$ dos aplicaciones. Las observaciones que preceden, junto con la Proposición 38, muestran que se tiene (ver [**1**], Cap. IV):

Proposición 39. *Para que $\psi \times \psi' : U \times U' \to V \times V'$ sea regular, es necesario y suficiente que ψ y ψ' sean regulares.*

De ahí que:

Corolario. *Para que $\psi \times \psi'$ sea un isomorfismo birregular, es necesario y suficiente que ψ y ψ' sean isomorfismos birregulares.*

34. Definición de la estructura de variedad algebraica.

Definición 5. *Se llama variedad algebraica sobre K (o simplemente variedad algebraica) a un conjunto X dotado:*

1º de una topología,

2º de un subhaz $\mathcal{O}_X$ del haz $\mathcal{F}(X)$ de gérmenes de funciones en X con valores en K,

verificando los axiomas (VA$_I$) *y* (VA$_{II}$) *que enunciaremos a continuación.*

Primero observemos que, si X e Y están dotadas de estructuras del tipo precedente, se tiene la noción de *isomorfismo* de X en Y: es un homeomorfismo de X en Y que transforma $\mathcal{O}_X$ en $\mathcal{O}_Y$. Por otro lado, si X' es abierto en X, se puede dotar X' de la topología inducida y del haz inducido: se tiene una noción de *estructura inducida* sobre un abierto. Aclarado esto, podemos enunciar el axioma (VA$_I$):

(VA$_I$) - *Existe un recubrimiento abierto finito* $\mathfrak{V} = \{V_i\}_{i\in I}$ *del espacio* X *tal que cada* V_i*, dotado de la estructura inducida por la de* X*, es isomorfo a un subespacio localmente cerrado* U_i *de un espacio afín, dotado del haz* $\mathcal{O}_{U_i}$ *definido en el nº 31.*

Para abreviar, llamaremos *variedad prealgebraica* a todo espacio topológico X dotado de un haz $\mathcal{O}_X$ verificando el axioma (VA$_I$). Un isomorfismo $\varphi_i : V_i \to U_i$ recibe el nombre de *carta* del abierto V_i; la condición (VA$_I$) significa entonces que es posible recubrir X a partir de un número finito de abiertos que poseen cartas. La Proposición 33 muestra que X es noetheriano, luego compacto, así como todos sus subespacios.

La topología de X será llamada "topología de Zariski" en X, y el haz $\mathcal{O}_X$ será llamado el *haz de anillos locales* de X.

PROPOSICIÓN 40. *Sea* X *un conjunto, unión de una familia finita de subconjuntos* X_j*,* $j \in J$*. Supongamos que cada* X_j *está dotado de una estructura de variedad prealgebraica, y que se verifican las siguientes condiciones:*

(a) $X_i \cap X_j$ *es abierto* X_i*, para cualesquiera* $i, j \in J$*,*

(b) las estructuras inducicas por X_i *y por* X_j *sobre* $X_i \cap X_j$ *coinciden para cualesquiera* $i, j \in J$*.*

Entonces existe una única estructura de variedad prealgebraica en X *tal que los* X_j *son abiertos en* X *y la estructura inducida sobre cada* X_j *es la estructura dada.*

La existencia y unicidad de la topología de X y del haz $\mathcal{O}_X$ son inmediatas; queda verificar que dicha topología y dicho haz satisfacen (VA$_I$), lo que resulta del hecho de que los X_j son un número finito de abiertos verificando (VA$_I$).

COROLARIO. *Sean* X *y* X' *dos variedades prealgebraicas. Existe sobre* $X \times X'$ *una única estructura de variedad prealgebraica verificando la siguiente condición: Si* $\varphi : V \to U$ *y* $\varphi' : V' \to U'$ *son dos cartas (siendo* V *abierto en* X *y* V' *abierto en* X'*), entonces* $V \times V'$ *es abierto en* $X \times X'$ *y* $\varphi \times \varphi' : V \times V' \to U \times U'$ *es una carta.*

Recubramos X por un número finito de abiertos V_i con cartas $\varphi_i : V_i \to U_i$, y sea (V'_j, U'_j, φ'_j) una familia análoga para X'. El conjunto $X \times X'$ es unión de los $V_i \times V'_j$; dotamos a cada $V_i \times V'_j$ de la estructura de variedad prealgebraica imagen de la de $U_i \times U'_j$ por $\varphi_i^{-1} \times \varphi_j'^{-1}$; las hipótesis (a) y (b) de la Proposición 40 son aplicables a este recubrimiento de $X \times X'$, según el corolario a la Proposición 39. Se obtiene entonces una estructura de variedad prealgebraica sobre $X \times X'$ que verifica las condiciones deseadas.

Se puede aplicar el corolario anterior al caso particular $X' = X$; así pues $X \times X$ queda provisto de una estructura de variedad prealgebraica, y en particular de una *topología.* Ya podemos enunciar el axioma (VA$_{II}$):

(VA$_{II}$) - *La diagonal* Δ *de* $X \times X$ *es cerrada en* $X \times X$*.*

Supongamos que X es una variedad prealgebraica, obtenida por el proceso de "pegado" de la Proposición 40; para que se cumpla la condición (VA$_{II}$), es necesario y suficiente que $X_{ij} = \Delta \cap X_i \times X_j$ sea cerrado en $X_i \times X_j$. Ahora bien, X_{ij} es el conjunto de los

(x, x) con $x \in X_i \cap X_j$. Supongamos entonces que existen cartas $\varphi_i : X_i \to U_i$, y sea $T_{ij} = \varphi_i \times \varphi_j(X_{ij})$; T_{ij} es el conjunto de los $(\varphi_i(x), \varphi_j(x))$ cuando x recorre $X_i \cap X_j$. El axioma toma entonces la siguiente forma:

(VA'_{II}) - *Para toda pareja* (i, j), T_{ij} *es cerrado en* $U_i \times U_j$.

Bajo esta forma, es igual que el axioma (A) de Weil (ver [**16**], p. 167), con la diferencia de que Weil solo considera variedades irreducibles.

Ejemplos de variedades algebraicas: Todo subespacio localmente cerrado U de un espacio afín, dotado de la topología inducida y del haz inducido $\mathcal{O}_U$ definido en el n$^{\text{o}}$ 31, es una variedad algebraica. Toda variedad proyectiva es una variedad algebraica (ver n$^{\text{o}}$ 51). Todo espacio fibrado algebraico (ver [**17**]) cuyos espacios base y fibra sean variedades algebraicas es él mismo una variedad algebraica.

Observaciones. (1) Nótese la analogía entre la condición (VA_{II}) y la condición de *Hausdorff* impuesta sobre las variedades topológicas, diferenciables y analíticas.

(2) Ejemplos sencillos muestran que la condición (VA_{II}) *no es* consecuencia de la condición (VA_I).

35. Aplicaciones regulares, estructuras inducidas, productos. Sean X e Y dos variedades algebraicas, φ una aplicación de X en Y. Se dice que φ es *regular* si:

(a) φ *es continua*,

(b) *Si* $x \in X$ *y* $f \in \mathcal{O}_{\varphi(x),Y}$, *entonces* $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_{x,X}$.

Igual que en el n$^{\text{o}}$ 32, la composición de dos aplicaciones regulares es regular y, para que una biyección $\varphi : X \to Y$ sea un isomorfismo, es necesario y suficiente que φ y φ^{-1} sean aplicaciones regulares. Las aplicaciones regulares forman así una familia de *morfismos* para la estructura de variedad algebraica, en el sentido de [**1**], Cap. IV.

Sea X una variedad algebraica, y X' un subconjunto localmente cerrado de X. Dotemos a X' de la topología inducida por la de X y del haz $\mathcal{O}_{X'}$ inducido por $\mathcal{O}_X$ (de manera más precisa, para cada $x \in X'$, se define $\mathcal{O}_{x,X'}$ como la imagen de $\mathcal{O}_{x,X}$ por el morfismo canónico $\mathcal{F}(X)_x \to F(X')_x$). Se verifica el axioma (VA_I): si $\varphi_i : V_i \to U_i$ es un sistema de cartas tal que $X = \bigcup V_i$, pongamos $V'_i = X' \cap V_i$, $U'_i = \varphi_i(V'_i)$ y $\varphi_i : V'_i \to U'_i$ es un sistema de cartas tal que $X' = \bigcup V'_i$. El axioma (VA_{II}) se cumple porque la topología de $X' \times X'$ es la inducida por la de $X \times X$ (también se podría utilizar (VA'_{II})). Se define así una estructura de variedad algebraica en X', que se dice *inducida* por la de X; se dice también que X' es una *subvariedad* de X (en Weil [**16**], el término de "subvariedad" se reserva para lo que nosotros llamaremos aquí subvariedad irreducible cerrada). Si ι designa la inyección de X' en X, ι es una aplicación regular; además, si φ es una aplicación de una variedad algebraica Y en X', para que $\varphi : Y \to X'$ sea regular, es necesario y suficiente que $\iota \circ \varphi : Y \to X$ sea regular (lo que justifica el término de "estructura inducida", ver [**1**], loc. cit.).

Si X y X' son variedades algebraicas, $X \times X'$ es una variedad algebraica, llamada *variedad producto*; en efecto, basta con ver que se cumple el axioma (VA'_{II}), es decir, que si $\varphi_i : V_i \to U_i$ y $\varphi'_{i'} : V'_{i'} \to U'_{i'}$ son sistemas de cartas tales que $X = \bigcup V_i$ y $X' = \bigcup V'_{i'}$, entonces el conjunto $T_{ij} \times T'_{i'j'}$ es cerrado en $U_i \times U_j \times U'_{i'} \times U'_{j'}$ (las notaciones son las del nº 34); ahora bien, esto resulta inmediatamente del hecho de que T_{ij} y $T'_{i'j'}$ son cerrados en $U_i \times U_j$ y $U'_{i'} \times U'_{j'}$ respectivamente.

Las Proposiciones 38 y 39 siguen siendo válidas para variedades algebraicas arbitrarias, sin más modificaciones.

Si $\varphi : X \to Y$ es una aplicación regular, la gráfica Φ de φ es *cerrada* en $X \times Y$, por ser la imagen inversa de la diagonal de $Y \times Y$ por la aplicación $\varphi \times 1 : X \times Y \to Y \times Y$; además, la aplicación $\psi : X \to \Phi$ definida por $\psi(x) = (x, \varphi(x))$ es un isomorfismo: en efecto, ψ es una aplicación regular, así como ψ^{-1} (porque es la restricción de la proyección $X \times Y \to X$).

36. Cuerpos de funciones racionales sobre una variedad irreducible. Primero demostraremos dos lemas de naturaleza puramente topológica:

LEMA 4. *Sean X un espacio conexo, G un grupo abeliano y $\mathcal{G}$ el haz constante sobre X isomorfo a G. La aplicación canónica $G \to \Gamma(X, \mathcal{G})$ es biyectiva.*

Un elemento de $\Gamma(X, \mathcal{G})$ no es más que una aplicación continua de X en G con la topología discreta. Puesto que X es conexo, una tal aplicación es constante, lo que demuestra el lema.

Diremos que un haz $\mathcal{F}$ sobre un espacio X es *localmente constante* si todo punto de X posee un entorno U tal que $\mathcal{F}(U)$ es constante sobre U.

LEMA 5. *Todo haz localmente constante sobre un espacio irreducible es constante.*

Sean $\mathcal{F}$ el haz, X el espacio, y pongamos $F = \Gamma(X, \mathcal{F})$; bastará con demostrar que el morfismo canónico $\rho_x : F \to \mathcal{F}_x$ es biyectivo para todo $x \in X$, porque así obtendremos un isomorfismo del haz constante isomorfo a F con el haz $\mathcal{F}$ dado.

Si $f \in F$, el lugar de los puntos $x \in X$ tales que $f(x) = 0$ es abierto (por las propiedades generales de los haces), y cerrado (porque $\mathcal{F}$ es localmente constante); viendo que todo espacio irreducible es conexo, dicho lugar es $\emptyset$ o X, lo que demuestra entonces que ρ_x es inyectivo.

Sea ahora $m \in \mathcal{F}_x$, y sea s una sección de $\mathcal{F}$ sobre un entorno U de x tal que $s(x) = m$; cubramos X por abiertos no vacíos U_i tales que $\mathcal{F}(U_i)$ es constante sobre U_i; como X es irreducible, se tiene que $U \cap U_i \neq \emptyset$; escojamos un punto $x_i \in U \cap U_i$; es evidente que existe una sección s_i de $\mathcal{F}$ sobre U_i tal que $s_i(x_i) = s(x_i)$, y como las secciones s y s_i coinciden en x_i, coinciden en todo $U \cap U_i$, porque $U \cap U_i$ es irreducible, luego conexo; del mismo modo s_i y s_j coinciden sobre $U_i \cap U_j$, porque coinciden sobre $U \cap U_i \cap U_j \neq \emptyset$; luego las secciones s_i definen una única sección s de $\mathcal{F}$ a lo largo de X, y se tiene que $\rho_x(s) = m$, lo que completa la demostración.

Sea ahora X una variedad algebraica irreducible. Si U es un abierto no vacío de X, pongamos $\mathcal{A}_U = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$; $\mathcal{A}_U$ es un *anillo íntegro*: en efecto, supongamos que se tiene $f \cdot g = 0$, siendo f y g aplicaciones regulares de U en K; si F (resp. G) es el lugar de los puntos $x \in U$ tales que $f(x) = 0$ (resp. $g(x) = 0$), se tiene que $U = F \cup G$, y F y G son cerrados en U, porque f y g son continuas; como U es irreducible, se deduce que

$F = U$ o $G = U$, lo que significa que f o g son nulas sobre U. Se puede entonces hablar de cuerpos de cocientes de $\mathcal{A}_U$, que denotaremos $\mathcal{K}_U$; si $U \subset V$, el morfismo $\rho_U^V : \mathcal{A}_V \to \mathcal{A}_U$ es inyectivo porque U es denso en V, y se tiene un isomorfismo bien determinado φ_U^V de $\mathcal{K}_V$ en $\mathcal{K}_U$; el sistema de los $\{\mathcal{K}_U, \varphi_U^V\}$ define un haz de cuerpos $\mathcal{K}$; además $\mathcal{K}_x$ es canónicamente isomorfo al cuerpo de cocientes de $\mathcal{O}_{x,X}$.

PROPOSICIÓN 41. *Para toda variedad algebraica irreducible X, el haz $\mathcal{K}$ definido anteriormente es un haz constante.*

Viendo el Lema 5, basta probar la Proposición cuando X es una subvariedad localmente cerrada del espacio afín K^r; sea F el cierre de X en K^r, y sea $I(F)$ el ideal de $K[X_1, \ldots, X_r]$ formado por los polinomios nulos sobre F (o sobre X, da lo mismo). Si ponemos $A = K[X_1, \ldots, X_r]/I(F)$, el anillo A es íntegro porque X es irreducible; sea $K(A)$ el cuerpo de cocientes de A. Según el corolario a la Proposición 36, se puede identificar $\mathcal{O}_{x,X}$ con el anillo de fracciones de A relativo al ideal maximal definido por x; se obtiene así un isomorfismo del cuerpo $K(A)$ sobre el cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}_{x,X}$, y es fácil ver que se define así un isomorfismo del haz constante igual a $K(A)$ sobre el haz $\mathcal{K}$, lo que demuestra la proposición.

Según el Lema 4, las secciones del haz $\mathcal{K}$ forman un cuerpo, isomorfo a $\mathcal{K}_x$ para todo $x \in X$, y que denotaremos por $K(X)$. Recibe el nombre de *cuerpo de funciones racionales* de X; es una extensión de tipo finito del cuerpo K, cuyo grado de trascendencia sobre K es la *dimensión* de X (esta definición se extiende a variedades algebraicas reducibles poniendo $\dim X = \sup \dim Y_i$, si X es unión de subvariedades cerradas irreducibles Y_i). Se identificará en general el cuerpo $K(X)$ con el cuerpo $\mathcal{K}_x$; como se tiene que $\mathcal{O}_{x,X} \subset \mathcal{K}_x$, se ve que $\mathcal{O}_{x,X}$ corresponde a un *subanillo* de $K(X)$ (es el anillo de especialización al punto x de $K(X)$, en el sentido de Weil, [**16**], p. 77). Si U es abierto en X, $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ es entonces la intersección en $K(X)$ de los anillos $\mathcal{O}_{x,X}$ cuando x recorre U.

Si Y es una subvariedad de X, se tiene que $\dim Y \leq \dim X$; si por otro lado Y es cerrada y no contiene ninguna componente irreducible de X, se tiene que $\dim Y < \dim X$, como se ve restringiéndose al caso de subvariedades de K^r (ver por ejemplo [**8**], Cap. X, §5, th. II).

§2. Haces algebraicos coherentes

37. El haz de anillos locales de una variedad algebraica. Retomamos las notaciones del nº 31: sea $X = K^r$ y sea $\mathcal{O}$ el haz de anillos locales de X. Se tiene:

LEMA 6. *El haz $\mathcal{O}$ es un haz coherente de anillos en el sentido del nº 15.*

Sean $x \in X$, U un entorno de x, y $f_1, \ldots, f_p$ secciones de $\mathcal{O}$ sobre U, es decir, funciones racionales regulares en todo punto de U; vamos a ver que el haz de relaciones entre $f_1, \ldots, f_p$ es un haz de tipo finito sobre $\mathcal{O}$. Cambiando U por otro entorno más pequeño si es preciso, podemos suponer que las f_i se escriben $f_i = P_i/Q$, donde los P_i y Q son polinomios y Q no se anula en U. Sean ahora $y \in U$ y $g_i \in \mathcal{O}_y$ tales que $\sum_{i=1}^{i=p} g_i f_i$ es nulo en un entorno de y; se oueden entonces escribir las g_i de la forma $g_i = R_i/S$, donde los R_i y S son polinomios, y S no se anula en y. La relación "$\sum_{i=1}^{i=p} g_i f_i = 0$ en un entorno de y" equivale a la relación "$\sum_{i=1}^{i=p} R_i P_i = 0$ en un entorno de y", la cual es equivalente a $\sum_{i=1}^{i=p} R_i P_i = 0$. Como el módulo de relaciones entre los polinomios P_i es un módulo de tipo finito (porque el anillo de polinomios es noetheriano), se sigue entonces que el anillo de las relaciones entre las f_i es de tipo finito.

Sea ahora V una subvariedad cerrada de $X = K^r$; para todo $x \in X$, sea $\mathcal{I}_x(V)$ el ideal de $\mathcal{O}_x$ formado por los elementos $f \in \mathcal{O}_x$ cuya restricción a V es nula en un entorno de x (se tiene que $\mathcal{I}_x(V) = \mathcal{O}_x$ si $x \neq V$). Los $\mathcal{I}_x(V)$ forman un subhaz $\mathcal{I}(V)$ del haz $\mathcal{O}$.

Lema 7. *El haz $\mathcal{I}(V)$ es un haz coherente de $\mathcal{O}$-módulos.*

Sea $I(V)$ el ideal de $K(X_1, \ldots, X_r)$ formado por los polinomios P nulos sobre V. Según la Proposición 36, $\mathcal{I}_x(V)$ es igual a $I(V) \cdot \mathcal{O}_x$ para todo $x \in V$, y la misma fórmula vale para $x \notin V$ como se ve enseguida. El ideal $I(V)$ está generado por un número finito de elementos, luego el haz $\mathcal{I}(V)$ es de tipo finito, luego coherente por el Lema 6 y la Proposición 16 del nº 15.

Ahora extenderemos el Lema 6 a una variedad algebraica arbitraria:

Proposición 42. *Si V es una variedad algebraica, el haz $\mathcal{O}_V$ es un haz coherente de anillos sobre V.*

Como la cuesión es local, podemos suponer que V es una subvariedad cerrada del espacio afín K^r. Por el Lema 7, $\mathcal{I}(V)$ es un haz coherente de ideales, luego el haz $\mathcal{O}/\mathcal{I}(V)$ es un haz coherente de anillos sobre X, por el Teorema 3 del nº 16. Este haz de anillos es nulo fuera de V, y su restricción a V no es otra que $\mathcal{O}_V$ (nº 31); luego el haz $\mathcal{O}_V$ es un haz coherente de anillos sobre V (nº 17, corolario a la Proposición 19).

Observación. Es claro que la Proposición 42 vale, más generalmente, para toda variedad prealgebraica.

38. Haces algebraicos coherentes. Si V es una variedad algebraica cuyo haz de anillos locales es $\mathcal{O}_V$, llamaremos *haz algebraico* sobre V a todo haz de $\mathcal{O}_V$-módulos, en el sentido de nº 6; si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son haces algebraicos, diremos que $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un *morfismo algebraico* (o simplemente un morfismo) si es un $\mathcal{O}_V$-morfismo; recordemos que ello equivale a decir que cada $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ es $\mathcal{O}_{x,V}$-lineal y que φ transforma secciones locales de $\mathcal{F}$ en secciones locales de $\mathcal{G}$.

Si $\mathcal{F}$ es un haz algebraico sobre V, los grupos de cohomología $H^q(V, \mathcal{F})$ son módulos sobre $\Gamma(V, \mathcal{O}_V)$, ver nº 23; en particular, son *espacios vectoriales sobre K*.

Un haz algebraico $\mathcal{F}$ sobre V diremos que es *coherente* si es un haz coherente de $\mathcal{O}_V$-módulos, en el sentido de nº 12; viendo la Proposición 15 de nº 15 y la Proposición 42, un haz de este tipo está caracterizado por el hecho de ser localmente isomorfo al conúcleo de un morfismo algebraico $\varphi : \mathcal{O}_V^q \to \mathcal{O}_V^p$.

Vamos a dar algunos ejemplos de haces algebraicos coherentes (veremos otros más tarde, especialmente en nº 48 y nº 57).

39. Haz de ideales definido por una subvariedad cerrada. Sea W una subvariedad cerrada de una variedad algebraica V. Para cada $x \in V$, sea $\mathcal{I}_x(W)$ el ideal de $\mathcal{O}_{x,V}$ formado por los f cuya restricción a W sea nula en un entorno de x; sea $\mathcal{I}(W)$ el subhaz de $\mathcal{O}_V$ formado por los $\mathcal{I}_x(W)$. Se tiene la siguiente Proposición, que generaliza el Lema 7:

Proposición 43. *El haz $\mathcal{I}(W)$ es un haz algebraico coherente.*

Como la cuestión es local, podemos suponer que V (luego también W) es una subvariedad cerrada del espacio afín K^r. Resulta ahora del Lema 7, aplicado a W, que el haz de ideales definido por W en K^r es de tipo finito: se sigue que $\mathcal{I}(W)$, que es su imagen por el morfismo canónico $\mathcal{O} \to \mathcal{O}_V$, es también de tipo finito, luego coherente por la Proposición 16 de nº 15 y la Proposición 42 de nº 37.

Sea $\mathcal{O}_W$ el haz de anillos locales de W, y sea $\mathcal{O}_W^V$ el haz sobre V obtenido prolongando $\mathcal{O}_W$ por 0 fuera de W (ver nº 5); dicho haz es canónicamente isomorfo a $\mathcal{O}_V/\mathcal{I}(W)$, o sea que se tiene una sucesión exacta:

$$0 \to \mathcal{I}(W) \to \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_W^V \to 0.$$

Sea entonces $\mathcal{F}$ un haz algebraico sobre W, y sea $\mathcal{F}^V$ el haz obtenido prolongando $\mathcal{F}$ por 0 fuera de W; se puede considerar $\mathcal{F}^V$ como un haz de $\mathcal{O}_W^V$-módulos, luego también como un haz de $\mathcal{O}_V$-módulos cuyo anulador contiene a $\mathcal{I}(W)$. Se tiene:

Proposición 44. *Si $\mathcal{F}$ es un haz algebraico coherente sobre W, $\mathcal{F}^V$ es un haz algebraico coherente sobre V. Recíprocamente, si $\mathcal{G}$ es un haz algebraico coherente sobre V cuyo anulador contiene a $\mathcal{I}(W)$, la restricción de $\mathcal{F}$ a W es un haz algebraico coherente sobre W.*

Si $\mathcal{F}$ es un haz algebraico coherente sobre W, $\mathcal{F}^V$ es un haz coherente de $\mathcal{O}_W^V$-módulos (nº 17, Proposición 19), luego un haz coherente de $\mathcal{O}_V$-módulos (nº 16, Teorema 3). Recíprocamente, si $\mathcal{G}$ es un haz algebraico coherente sobre V, cuyo anulador contiene a $\mathcal{I}(W)$, $\mathcal{G}$ puede ser considerado como un haz de $\mathcal{O}_V/\mathcal{I}(W)$-módulos, que es coherente (nº 16, Teorema 3); la restricción de $\mathcal{G}$ a W es entonces un haz coherente de $\mathcal{O}_W$-módulos (nº 17, Proposición 19).

Así pues, todo haz algebraico coherente sobre W se puede identificar con un haz coherente sobre V (y esta identificación no cambia los grupos de cohomología, por la Proposición 27 del nº 26). En particular, todo haz algebraico coherente sobre una variedad afín (resp. proyectiva) se puede considerar como un haz algebraico coherente sobre el espacio afín (resp. proyectivo); en lo que sigue haremos uso de esta posibilidad frecuentemente.

Observación. Sea $\mathcal{G}$ un haz algebraico coherente sobre V, que sea nulo fuera de W; el anulador de $\mathcal{G}$ *no contiene necesariamente* a $\mathcal{I}(W)$ (dicho de otra forma, $\mathcal{G}$ no siempre puede ser considerado como un haz algebraico coherente sobre W); solo sabemos que contiene a una *potencia* de $\mathcal{I}(W)$.

40. Haces de ideales fraccionarios. Sea V una variedad algebraica irreducible, y sea $K(V)$ el haz constante de funciones racionales sobre V (ver nº 36); $K(V)$ es un haz algebraico que no es coherente si $\dim V > 0$. Un subhaz algebraico $\mathcal{F}$ de $K(V)$ puede ser llamado "haz de ideales fraccionarios", porque cada $\mathcal{F}_x$ es un ideal fraccionario de $\mathcal{O}_{x,V}$.

Proposición 45. *Para que un subhaz algebraico $\mathcal{F}$ de $K(V)$ sea coherente, es necesario y suficiente que sea de tipo finito.*

La necesidad es trivial. Para demostrar la suficiencia, basta probar que $K(V)$ verifica la condición (b) de la definición 2 de nº 12, es decir, que si $f_1, \ldots, f_p$ son fracciones racionales, el haz $\mathcal{R}(f_1, \ldots, f_p)$ es de tipo finito. Si x es un punto de V, se pueden encontrar funciones g_i y h, tales que $f_i = g_i/h$, siendo las g_i y h regulares sobre un entorno U de x, con h no nula sobre U; el haz $\mathcal{R}(f_1, \ldots, f_p)$ coincide entonces con el haz $\mathcal{R}(g_1, \ldots, g_p)$, que es de tipo finito porque $\mathcal{O}_V$ es un haz coherente de anillos.

41. Haz asociado a un fibrado vectorial. Sea E un espacio fibrado algebraico, con fibra vectorial de dimensión r, y de base una variedad algebraica V; por definición, la fibra típica E es el espacio vectorial K^r, y el grupo estructural es el grupo lineal $GL(r, K)$ operando sobre K^r del modo usual (para la definición de espacio fibrado algebraico, ver [**17**]; ver también [**15**], nº4 para los espacios fibrados *analíticos* en fibras vectoriales).

Si U es un abierto de V, sea $\mathcal{S}(E)_U$ conjunto de secciones de E regulares sobre U; si $V \supset U$, se tiene un morfismo de restricción $\varphi_U^V : \mathcal{S}(E)_V \to \mathcal{S}(E)_U$; dando un haz $\mathcal{S}(E)$ llamado el *haz de gérmenes de secciones* de E. Dado que E es un fibrado vectorial, cada $\mathcal{S}(E)_U$ es un $\Gamma(U, \mathcal{O}_V)$-módulo, y se sigue que $\mathcal{S}(E)$ es un haz algebraico sobre V. Si se identifica localmente E con $V \times K^r$, se ve que:

PROPOSICIÓN 46. *El haz $\mathcal{S}(E)$ es localmente isomorfo a $\mathcal{O}_V^r$; en particular, es un haz algebraico coherente.*

Recíprocamente, es fácil ver que todo haz algebraico $\mathcal{F}$ sobre V, localmente isomorfo a $\mathcal{O}_V^r$, es isomorfo a un haz $\mathcal{S}(E)$, donde E está determinado salvo isomorfismos (ver [**15**] para el caso analítico).

Si V es no singular, se puede tomar como E el fibrado de *p-covectores* tangentes a V (siendo p un entero ≥ 0); sea Ω^p el haz $\mathcal{S}(E)$ correspondiente; un elemento de Ω_x^p, $x \in V$, no es más que una *forma diferencial* de grado p sobre V, regular en x. Si se pone $h^{p,q} = \dim_K H^q(V, \Omega^p)$, se sabe que, en el caso clásico (y si V es proyectiva), $h^{p,q}$ es igual a la dimensión del espacio de formas armónicas de tipo (p, q) (teorema de Dolbeault[6]), y, si B_n designa el n-ésimo número de Betti de V, entonces $B_n = \sum_{p+q=n} h^{p,q}$, En el caso general, se puede tomar la fórmula anterior como *definición* de los números de Betti de una variedad proyectiva sin singularidades (veremos en nº 66 que los $h^{p,q}$ son finitos). Convendría estudiar sus propiedades, especialmente ver si coinciden con los que intervienen en las conjeturas de Weil relativas a variedades sobre cuerpos finitos[7]. Cabe destacar aquí que verifican la "dualidad de Poincaré" $B_n = B_{2m-n}$ cuando V es irreducible de dimensión m.

Los grupos de cohomología $H^q(V, \mathcal{S}(E))$ intervienen también en otras cuestiones, especialmente en el teorema de Riemann-Roch, así como en la clasificación de fibrados algebraicos de base V con grupo estructural el grupo afín $x \to ax + b$ (ver [**17**], §4, donde se trata el caso $\dim V = 1$).

[6]P. Dolbeault. *Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes.* C. R. Paris, 236, 1953, p. 175-177.

[7]Bulletin Amer. Math. Soc., 55, 1949, p. 507.

§3. Haces algebraicos coherentes sobre variedades afines

42. Variedades afines. Una variedad algebraica V se dice que es *afín* si es isomorfa a una subvariedad cerrada de un espacio afín. El producto de dos variedades afines es una variedad afín; toda subvariedad cerrada de una variedad afín es una variedad afín.

Un abierto U de una variedad algebraica X se dice que es *afín* si, dotado de la estructura de variedad algebraica inducida por la de X, es una variedad afín.

Proposición 47. *Sean U y V abiertos de una variedad algebraica X. Si U y V son afines, $U \cap V$ también es afín.*

Sea Δ la diagonal de $X \times X$; según nº 35, la aplicación $x \to (x, x)$ es un isomorfismo birregular de X en Δ; luego la restricción de esta aplicación a $U \cap V$ es un isomorfismo birregular de $U \cap V$ en $\Delta \cap U \times V$. Como U y V son variedades afines, $U \times V$ también es una variedad afín; por otro lado, Δ es cerrada en $X \times X$ por el axioma (VA$_{II}$), luego $\Delta \cap U \times V$ es cerrado en $U \times V$, lo que implica que es una variedad afín.

(Es fácil ver que esta Proposición no es válida para variedades prealgebraicas: el axioma (VA$_{II}$) es crucial).

Introducimos ahora una notación que será utilizada en el resto de la sección: si V es una variedad algebraica y f es una función regular sobre V, denotaremos por V_f el subconjunto abierto de V formado por los puntos $x \in V$ tales que $f(x) \neq 0$.

Proposición 48. *Si V es una variedad algebraica afín y f es una función regular sobre V, entonces V_f es un abierto afín.*

Sea W el subconjunto de $V \times K$ formado por las parejas (x, λ) tales que $\lambda \cdot f(x) = 1$; está claro que W es cerrado en $V \times K$, luego es una variedad afín. Para todo $(x, \lambda) \in W$, pongamos $\pi(x, \lambda) = x$; la aplicación π es una aplicación regular de W en V_f. Recíprocamente, para cada $x \in V_f$, pongamos $\omega(x) = (x, 1/f(x))$; la aplicación $\omega : V_f \to W$ es regular, y se tiene que $\pi \circ \omega = 1$, $\omega \circ \pi = 1$, luego V_f y W son isomorfos.

Proposición 49. *Sean V una subvariedad cerrada de K^r, F un cerrado de V y $U = V - F$. Los abiertos V_P forman una base para la topología de U cuando P recorre el conjunto de polinomios nulos sobre F.*

Sea $U' = V - F'$ un abierto de U, y sea $x \in U'$; veamos que existe P tal que $V_P \subset U'$ y $x \in P$; con otras palabras, P es nulo sobre F' y no nulo en x; la existencia de tal polinomio resulta inmediatamente de la definición de la topología en K^r.

Teorema 5. *Los abiertos afines de una variedad algebraica X forman una base de abiertos para la topología de X.*

Como la cuestión es local, se puede suponer que X es una subvariedad localmente cerrada de un espacio afín K^r; en este caso, el teorema resulta inmediatamente de las Proposiciones 48 y 49.

Corolario. *Los recubrimientos de X formados por abiertos afines son arbitrariamente finos.*

Nótese que, si $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ es un tal recubrimiento, los $U_{i_0\ldots i_p}$ son todos abiertos afines, por la proposición 47.

43. Propiedades básicas de las variedades irreducibles. Sea V una subvariedad cerrada de K^r, y sea $I(V)$ el ideal de $K[X_1,\ldots,X_r]$ formado por los polinomios nulos sobre V; sea A el anillo cociente $K[X_1,\ldots,X_r]/I(V)$; se tiene un morfismo canónico

$$\iota : A \to \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$$

que es inyectivo por la propia definición de $I(V)$.

Proposición 50. *Si V es irreducible, $\iota : A \to \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ es biyectivo.*

(De hecho, esto vale para toda subvariedad cerrada de K^r, como demostraremos en el nº siguiente).

Sea $K(V)$ el cuerpo de fracciones de A; según nº 36, podemos identificar $\mathcal{O}_{x,V}$ con la localización de A en el ideal $\mathfrak{m}_x$ formado por los polinomios nulos en x, y se tiene que $\Gamma(V, \mathcal{O}_V) = \bigcap_{x\in V} \mathcal{O}_{x,V}$ (considerando los $\mathcal{O}_{x,V}$ como subanillos de $K(V)$). Como K es algebraicamente cerrado, todo ideal maximal de A es igual a algún $\mathfrak{m}_x$ (teorema de los ceros de Hilbert); luego resulta inmediatamente (ver [**8**], Cap. XV, §5, th. X) que $A = \bigcap_{x\in V} \mathcal{O}_{x,V} = \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$.

Proposición 51. *Sean X una variedad algebraica irreducible, Q una función regular sobre X, y P una función regular sobre X_Q. Entonces, para todo n lo bastante grande, la función racional Q^nP es regular en todo X.*

Por la compacidad de X, la cuestión es local; según el Teorema 5, se puede suponer que X es una subvariedad cerrada de K^r. La Proposición anterior muestra entonces que Q es un elemento de $A = K[X_1,\ldots,X_r]/I(X)$. Por hipótesis sobre P, para cada $x \in X_Q$, se puede escribir $P = P_x/Q_x$, con P_x y Q_x en A, y $Q_x(x) \neq 0$; si $\mathfrak{a}$ designa el ideal de A generado por los Q_x, la variedad de los ceros de $\mathfrak{a}$ está contenida en la variedad de los ceros de Q; en virtud del teorema de los ceros de Hilbert, se deduce que $Q^n \in \mathfrak{a}$ para n suficientemente grande, luego $Q^n = \sum R_x \cdot Q_x$ y $Q^nP = \sum R_x \cdot P_x$ con $R_x \in A$, lo que prueba que Q^nP es regular en X.

(También podríamos haber utilizado que X_Q es afín cuando X lo es y haberle aplicado la Proposición 50 a X_Q).

Proposición 52. *Sean X una variedad algebraica irreducible, Q una función regular en X, $\mathcal{F}$ un haz algebraico coherente sobre X y s una sección de $\mathcal{F}$ sobre X cuya restricción a X_Q sea nula. Entonces, para n suficientemente grande, la sección Q^ns es nula sobre todo X.*

Como la cuestión es local, podemos suponer:

(a) que X es una subvariedad cerrada de K^r,

(b) que $\mathcal{F}$ es isomorfo al conúcleo de un morfismo $\varphi : \mathcal{O}_X^p \to \mathcal{O}_X^q$,

(c) que s es imagen de una sección σ de $\mathcal{O}_X^q$.

(En efecto, todas estas condiciones se verifican localmente).

Pongamos $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = K[X_1, \ldots, X_r]/I(X)$. La sección σ se puede identificar con un sistema de q elementos de A. Sean, por otro lado,

$$t_1 = \varphi(1, 0, \ldots, 0), \ldots, t_p = \varphi(0, \ldots, 0, 1);$$

los $t_i, 1 \leq i \leq p$, son secciones de $\mathcal{O}_X^q$ a lo largo de X, luego se pueden identificar con sistemas de q elementos de A. La hipótesis hecha sobre s significa que, para todo $x \in X_Q$, se tiene que $\sigma(x) \in \varphi(\mathcal{O}_{x,X}^p)$, es decir que σ se puede escribir de la forma $\sigma = \sum_{i=1}^{i=p} f_i \cdot t_i$, con $f_i \in \mathcal{O}_{x,X}$; quitando denominadores, existe $Q_x \in A, Q_x(x) \neq 0$, tal que $Q_x \cdot \sigma = \sum_{i=1}^{i=p} R_i \cdot t_i$, con $R_i \in A$. El razonamiento hecho más arriba muestra que, para todo n lo bastante grande, Q^n pertenece al ideal generado por los Q_x, luego $Q^n \sigma(x) \in \varphi(\mathcal{O}_{x,X}^p)$ para todo $x \in X$, lo que implica que $Q^n s$ es nula sobre todo X.

44. Nulidad de ciertos grupos de cohomología.

Proposición 53. *Sean X una variedad afín irreducible, Q_i una familia finita de funciones regulares sobre X sin ceros comunes y $\mathfrak{U}$ el recubrimiento abierto de X formado por los $X_{Q_i} = U_i$. Si $\mathcal{F}$ es un subhaz algebraico coherente de $\mathcal{O}_X^p$, se tiene $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ para todo $q > 0$.*

Reemplazando $\mathfrak{U}$ por un recubrimiento equivalente, se puede suponer que alguna de las Q_i no es idénticamente nula, es decir que $U_i \neq \emptyset$ para todo i.

Sea $f = (f_{i_0 \ldots i_q})$ un q-cociclo de $\mathfrak{U}$ con valores en $\mathcal{F}$. Cada $f_{i_0 \ldots i_q}$ es una sección de $\mathcal{F}$ sobre $U_{i_0 \ldots i_q}$, luego se puede identificar con un sistema de p funciones regulares sobre $U_{i_0 \ldots i_q}$; aplicando la Proposición 51 a $Q = Q_{i_0} \ldots Q_{i_q}$, se ve que, para todo n lo bastante grande, $g_{i_0 \ldots i_q} = (Q_{i_0} \ldots Q_{i_q})^n f_{i_0 \ldots i_q}$ es un sistema de p funciones regulares sobre X entero, es decir que es una sección de $\mathcal{O}^p$ sobre todo X. Escojamos un entero n tal que esto sea válido para todos los sistemas $i_0, \ldots, i_q$, lo cual es posible porque hay un número finito de ellos. Consideremos la imagen de $g_{i_0 \ldots i_q}$ en el haz coherente $\mathcal{O}_X^p / \mathcal{F}$; es una sección nula sobre $U_{i_0 \ldots i_q}$; aplicando entonces la Proposición 52, se ve que, para todo m lo bastante grande, el producto de esta sección por $(Q_{i_0} \ldots Q_{i_q})^m$ es nulo sobre todo X, lo que significa que $(Q_{i_0} \ldots Q_{i_q})^m g_{i_0 \ldots i_q}$ es una sección de $\mathcal{F}$ nula sobre X. Poniendo $N = m + n$, se ve entonces que se tienen construidas secciones $h_{i_0 \ldots i_q}$ de $\mathcal{F}$ sobre X, que coinciden con $(Q_{i_0} \ldots Q_{i_q})^N f_{i_0 \ldots i_q}$ sobre $U_{i_0 \ldots i_q}$.

Como las Q_i^N no se anulan simultáneamente, existen funciones

$$R_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

tales que $\sum R_i \cdot Q_i^N = 1$. Pongamos entonces, para todo sistema $i_0, \ldots, i_{q-1}$:

$$k_{i_0 \ldots i_{q-1}} = \sum_i R_i \cdot h_{i i_0 \ldots i_{q-1}} / (Q_{i_0} \ldots Q_{i_{q-1}})^N,$$

expresión que tiene sentido, porque $Q_{i_0} \ldots Q_{i_{q-1}}$ es distinto de 0 sobre $U_{i_0 \ldots i_{q-1}}$.

Se define entonces una cocadena $k \in C^{q-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Veamos que $f = dk$, lo que probará la Proposición.

Tenemos que verificar que $(dk)_{i_0 \ldots i_q} = f_{i_0 \ldots i_q}$; bastará con ver que dichas secciones coinciden sobre $U = \bigcap U_i$, ya que entonces coinciden en todo punto, puesto que son sistemas de p funciones racionales sobre X y $U \neq \emptyset$. Ahora bien, sobre U podemos escribir

$$k_{i_0 \ldots i_{q-1}} = \sum_i R_i \cdot Q_i^N \cdot f_{i i_0 \ldots i_{q-1}},$$

de ahí que

$$(dk)_{i_0 \ldots i_q} = \sum_{j=0}^{j=q} (-1)^q \sum_i R_i \cdot Q_i^N \cdot f_{i i_0 \ldots \hat{i}_j \ldots i_q},$$

y, teniendo encuenta que f es un cociclo,

$$(dk)_{i_0 \ldots i_q} = \sum_i R_i \cdot Q_i^N \cdot f_{i_0 \ldots i_q}.$$

Corolario. *$H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ para $q > 0$.*

En efecto, la Proposición 49 muestra que los recubrimientos del tipo utilizado en la Proposición 53 son arbitrariamente finos.

Corolario. *El morfismo $\Gamma(X, \mathcal{O}_X^p) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X^p / \mathcal{F})$ es epiyectivo.*

Es consecuencia del corolario anterior y del segundo corolario a la Proposición 25 en nº 24.

Corolario. *Sea V una subvariedad cerrada de K^r, y sea*

$$A = K[X_1, \ldots, X_r]/I(V).$$

El morfismo $\iota : A \to \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ es biyectivo.

Se aplica el corolario anterior con $X = K^r$, $p = 1$, $\mathcal{F} = \mathcal{I}(V)$, haz de ideales definido por V; se obtiene que todo elemento de $\Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ es restricción de una sección de $\mathcal{O}$ sobre X, es decir de un polinomio, por la Proposición 50 aplicada a X.

45. Secciones de un haz algebraico coherente sobre una variedad afín.

Teorema 6. *Sea $\mathcal{F}$ un haz algebraico coherente sobre una variedad afín X. Para cada $x \in X$, el $\mathcal{O}_{x,X}$-módulo $\mathcal{F}_x$ está generado por los elementos de $\Gamma(X, \mathcal{F})$.*

Como X es afín, se puede sumergir en un espacio afín K^r; prolongando el haz $\mathcal{F}$ por 0 fuera de X, se obtiene un haz algebraico coherente sobre K^r (ver nº 39), y bastará con probar el teorema para este nuevo haz. Es decir, podemos suponer que $X = K^r$.

Por la definición de haces coherentes, existe un recubrimiento de X formado por abiertos sobre los cuales $\mathcal{F}$ es isomorfo a un cociente de un haz $\mathcal{O}^p$. Usando la Proposición 49, se ve que existe un número finito de polinomios Q_i sin ceros comunes tales que existe sobre cada $U_i = X_{Q_i}$ un morfismo epiyectivo $\varphi : \mathcal{O}^{p_i} \to \mathcal{F}$; por otro lado podemos suponer que alguno de los polinomios no es idénticamente nulo. El punto x pertenece a alguno de los U_i, sea U_0; está claro que $\mathcal{F}_x$ está generado por las secciones de $\mathcal{F}$ sobre U_0; como Q_0 es invertible sobre $\mathcal{O}_x$, bastará con probar el siguiente lema:

Lema 8. *Si s_0 es una sección de $\mathcal{F}$ a lo largo de U_0, existe un entero N y una sección s de $\mathcal{F}$ sobre X tales que $s = Q_0^N \cdot s_0$ sobre U_0.*

Por la Proposición 48, $U_i \cap U_0$ es una variedad afín, evidentemente irreducible; aplicando el segundo Corolario de la Proposición 53 a esta variedad y a $\varphi_i : \mathcal{O}^{p_i} \to \mathcal{F}$, se ve que existe una sección σ_{0i} de $\mathcal{O}^{p_i}$ sobre $U_i \cap U_0$ tal que $\varphi_i(\sigma_{0i}) = s_0$ sobre $U_i \cap U_0$; como $U_i \cap U_0$ es el lugar de los puntos de U_i donde Q_0 no se anula, se puede aplicar la Proposición 51 a $X = U_i, Q = Q_0$ y se ve entonces que existe, para n lo bastante grande, una sección σ_i de $\mathcal{O}^{p_i}$ sobre U_i que coincide con $Q_0^n \cdot \sigma_{0i}$ sobre $U_i \cap U_0$; poniendo $s'_i = \varphi_i(\sigma_i)$, se obtiene una sección de $\mathcal{F}$ sobre U_i que coincide con $Q_0^n \cdot s_0$ sobre $U_i \cap U_0$. Las secciones s'_i y s'_j coinciden sobre $U_i \cap U_j \cap U_0$; al aplicar la Proposición 52 a $s'_i - s'_j$ se ve que, para m lo bastante grande, se tiene $Q_0^m \cdot (s'_i - s'_j) = 0$ sobre $U_i \cap U_j$ entero. Las $Q_0^m \cdot s'_i$ definen entonces una única sección s de $\mathcal{F}$ sobre X, y se tiene $s = Q_0^{n+m} \cdot s'_i$ sobre U_0, lo que demuestra el lema y completa la demostración del Teorema 6.

Corolario. *El haz $\mathcal{F}$ es isomorfo a un haz cociente de un haz $\mathcal{O}_X^p$.*

Dado que $\mathcal{F}_x$ es un $\mathcal{O}_{x,X}$-módulo finitamente generado, resulta del teorema anterior que existe un número finito de secciones de $\mathcal{F}$ que generan $\mathcal{F}_x$; por la Proposición 9 de nº 12, dichas secciones también generan $\mathcal{F}_y$ para y lo bastante cerca de x. Como X es compacto, se concluye con que existe un número finito de secciones $s_1, \dots, s_p$ de $\mathcal{F}$ que generan $\mathcal{F}_x$ para todo $x \in X$, lo que significa que $\mathcal{F}$ es isomorfo a un haz cociente del haz $\mathcal{O}_X^p$.

Corolario. *Sea $\mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B} \xrightarrow{\beta} \mathcal{C}$ una sucesión exacta de haces algebraicos coherentes sobre una variedad afín X. Entonces la sucesión $\Gamma(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{\alpha} \Gamma(X, \mathcal{B}) \xrightarrow{\beta} \Gamma(X, \mathcal{C})$ es exacta.*

Se puede suponer, como en la demostración del Teorema 6, que X es el espacio afín K^r, luego es irreducible. Pongamos $\mathcal{I} = \operatorname{Im}(\alpha) = \ker(\beta)$; todo se reduce a ver que $\alpha : \Gamma(X, \mathcal{A}) \to \Gamma(X.\mathcal{I})$ es epiyectivo. Ahora bien, por el primer Corolario al Teorema 6, se puede encontrar un morfismo epiyectivo $\varphi : \mathcal{O}_X^p \to \mathcal{A}$, y, por el segundo Corolario a la Proposición 53, $\alpha \circ \varphi : \Gamma(X, \mathcal{O}_X^p) \to \Gamma(X, \mathcal{I})$ es epiyectivo; con más razón lo será $\alpha : \Gamma(X, \mathcal{A}) \to \Gamma(X, \mathcal{I})$, como queríamos demostrar.

46. Grupos de cohomología de una variedad afín con coeficientes en un haz algebraico coherente. Vamos a generalizar la Proposición 53:

Teorema 7. *Sean X una variedad afín, Q_i una familia finita de funciones regulares sobre X sin ceros comunes, y $\mathfrak{U}$ el recubrimiento abierto de X formado por los $X_{Q_i} = U_i$. Si $\mathcal{F}$ es un haz algebraico coherente sobre X, se tiene $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ para todo $q > 0$.*

Supongamos primero que X es irreducible. Según el primer Corolario al Teorema 6, se puede encontrar una sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{O}_X^p \to \mathcal{F} \to 0.$$

La sucesión de complejos: $0 \to C(\mathfrak{U}, \mathcal{R}) \to C(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^p) \to C(X, \mathcal{F}) \to 0$ es *exacta*; en efecto, se reduce a ver que toda sección de $\mathcal{F}$ sobre un $U_{i_0 \dots i_q}$ es imagen de una sección de $\mathcal{O}_X^p$ sobre $U_{i_0 \dots i_q}$, lo que resulta del segundo Corolario a la Proposición 53, aplicado a la variedad irreducible $U_{i_0 \dots i_q}$. Esta sucesión exacta de complejos da lugar a una sucesión exacta de cohomología:

$$\dots \to H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^p) \to H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{R}) \to \dots,$$

y como $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^p) = H^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{R}) = 0$ por la Proposición 53, se concluye con que $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$.

Pasemos ahora al caso general. Se puede sumergir X como subvariedad cerrada de un espacio afín K^r; por el tercer Corolario a la Proposición 53, las funciones Q_i están inducidas por polinomios P_i; sea por otro lado R_j un sistema finito de generadores del ideal $I(X)$. Las funciones P_i, R_j no se anulan simultáneamente en K^r, luego definen un recubrimiento abierto $\mathfrak{U}'$ de K^r; sea $\mathcal{F}'$ el haz obtenido prolongando $\mathcal{F}$ por 0 fuera de X; al aplicar lo que acabamos de demostrar al espacio irreducible K^r, las funciones P_i, R_j y el haz $\mathcal{F}'$, se ve que $H^q(\mathfrak{U}', \mathcal{F}') = 0$ para $q > 0$. Como se verifica inmediatamente que el complejo $C(\mathfrak{U}', \mathcal{F}')$ es isomorfo al complejo $C(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, se sigue entonces que $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$.

COROLARIO. *Si X es una variedad afín y $\mathcal{F}$ es un haz algebraico coherente sobre X, se tiene $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ para todo $q > 0$.*

En efecto, los recubrimientos del tipo utilizado en el teorema anterior son arbitrariamente finos.

COROLARIO. *Sea $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$ una sucesión exacta de haces sobre una variedad afín X. Si el haz $\mathcal{A}$ es algebraico coherente, el morfismo $\Gamma(X, \mathcal{B}) \to \Gamma(X, \mathcal{C})$ es epiyectivo.*

Resulta del Corolario anterior, poniendo $q = 1$.

47. Recubrimientos por abiertos afines de variedades algebraicas.

PROPOSICIÓN 54. *Sea X una variedad afín, y sea $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento finito de X por abiertos afines. Si $\mathcal{F}$ es un haz algebraico coherente sobre X, se tiene $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ para todo $q > 0$.*

Por la Proposición 49, existen funciones regulares P_j sobre X tales que el recubrimiento $\mathfrak{V} = \{X_{P_j}\}$ es más fino que $\mathfrak{U}$. Para todo $(i_0, \dots, i_p)$, el recubrimiento $\mathfrak{V}_{i_0 \dots i_p}$ inducido por $\mathfrak{V}$ sobre $U_{i_0 \dots i_p}$ está definido por las restricciones de los P_j a $U_{i_0 \dots i_p}$; como $U_{i_0 \dots i_p}$ es una variedad afín según la Proposición 47, se puede aplicar el Teorema 7, y se concluye que $H^q(\mathfrak{V}_{i_0 \dots i_p}, \mathcal{F}) = 0$ para todo $q > 0$. Al aplicar ahora la Proposición 32 de n$^{\text{o}}$ 29, se ve que

$$H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = H^q(\mathfrak{V}, \mathcal{F}),$$

y como $H^q(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) = 0$ para $q > 0$ por el Teorema 7, la Proposición queda demostrada.

TEOREMA 8. *Sean X una variedad algebraica, $\mathcal{F}$ un haz algebraico coherente sobre X y $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento finito de X por abiertos afines. El morfismo $\sigma(\mathfrak{U}) : H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^n(X, \mathcal{F})$ es biyectivo para todo $n \geq 0$.*

Consideremos la familia $\mathfrak{V}^\alpha$ de recubrimientos finitos de X por abiertos afines. Según el corolario al Teorema 5, estos recubrimientos son arbitrariamente finos. Por otro lado, para todo sistema $(i_0, \dots, i_p)$, el recubrimiento $\mathfrak{V}^\alpha_{i_0\dots i_p}$ inducido por $\mathfrak{V}^\alpha$ sobre $U_{i_0\dots i_p}$ es un recubrimiento por abiertos afines, según la Proposición 47; por la Proposición 54, se tiene que $H^q(\mathfrak{V}_{i_0\dots i_p}, \mathcal{F}) = 0$ para $q > 0$. Se verifican entonces las condiciones (a) y (b) del Teorema 4, nº 29, lo que concluye la demostración.

TEOREMA 9. *Sean X una variedad algebraica y $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento finito de X por abiertos afines. Sea $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$ una sucesión exacta de haces sobre X, siendo el haz $\mathcal{A}$ algebraico coherente. El morfismo canónico $H^q_0(\mathfrak{U}, \mathcal{C}) \to H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$ (ver nº 24) es biyectivo para todo $q \geq 0$.*

Evidentemente basta con ver que $C_0(\mathfrak{U}, \mathcal{C}) = C(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$, es decir que toda sección de $\mathcal{C}$ sobre $U_{i_0\dots i_q}$ es imagen de una sección de $\mathcal{B}$ sobre $U_{i_0\dots i_q}$, lo que resulta del segundo Corolario al Teorema 7.

COROLARIO. *Sea X una variedad algebraica, y sea $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$ una sucesión exacta de haces sobre X, siendo el haz $\mathcal{A}$ algebraico coherente. El morfismo canónico $H^q_0(X, \mathcal{C}) \to H^q(X, \mathcal{C})$ es biyectivo para todo $q \geq 0$.*

Es una consecuencia inmediata de los Teoremas 5 y 9.

COROLARIO. *Se tiene una sucesión exacta:*

$$\cdots \to H^q(X, \mathcal{B}) \to H^q(X, \mathcal{C}) \to H^{q+1}(X, \mathcal{A}) \to H^{q+1}(X, \mathcal{B}) \to \dots$$

§4. Correspondencia entre módulos finitamente generados y haces algebraicos coherentes

48. Haz asociado a un módulo Sean V una variedad afín, $\mathcal{O}$ el haz de anillos locales de V; llamaremos anillo de coordenadas de V al anillo $A = \Gamma(V, \mathcal{O})$, es una álgebra sobre K que no tiene más nilpotentes que 0. Si V está sumergida como subvariedad cerrada de un espacio afín K^r, se sabe (ver nº 44) que A se identifica con el álgebra cociente de $K[X_1, \dots, X_r]$ por el ideal de los polinomios nulos sobre V; se sigue que el álgebra A está generada por un número finito de elementos.

Recíprocamente, se ve sin dificultad que, si A es una K-álgebra conmutativa sin elementos nilpotentes (más que 0) y generada por un número finito de elementos, existe una variedad afín V tal que A es isomorfa a $\Gamma(V, \mathcal{O})$; además V está determinada salvo isomorfismos por esta propiedad (se puede identificar V con el conjunto de caracteres[8] de A, dotado de la topología usual).

Sea M un A-módulo; M define sobre V un haz constante, que denotaremos también por M; igualmente A define un haz constante, y el haz M puede ser considerado como un haz de A-módulos. Pongamos $\mathcal{A}(M) = \mathcal{O} \otimes_A M$, considerando también al haz $\mathcal{O}$ como un haz de A-módulos; está claro que $\mathcal{A}(M)$ es un haz algebraico sobre V. Además, si $\varphi : M \to M'$ es un A-morfismo, se tiene un morfismo $\mathcal{A}(\varphi) = 1 \otimes \varphi : \mathcal{A}(M) \to M'$; en otras palabras, $\mathcal{A}(M)$ es un funtor contravariante del módulo M.

Proposición 55. *El funtor $\mathcal{A}(M)$ es exacto.*

Sea $M \to M' \to M''$ una sucesión exacta de A-módulos. Tenemos que ver que la sucesión $\mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(M') \to \mathcal{A}(M'')$ es exacta, es decir, que para todo $x \in V$, la sucesión:

$$\mathcal{O}_x \otimes_A M \to \mathcal{O}_x \otimes_A M' \to \mathcal{O}_x \otimes_A M''$$

es exacta.

Ahora bien, $\mathcal{O}_x$ no es otra cosa que la localización A_S de A, siendo S el conjunto de $f \in A$ tales que $f(x) \neq 0$ (para la definición de localización o anillo de fracciones, ver [**8**], [**12**] o [**13**]). La Proposición 55 es entonces un caso particular del siguiente resultado:

Lema 9. *Sean A un anillo, S un sistema multiplicativo de A que no contenga al* 0 *y A_S la localización de A por S. Si $M \to M' \to M''$ es una sucesión exacta de A-módulos, la sucesión $A_S \otimes_A M \to A_S \otimes_A M' \to A_S \otimes_A M''$*

Designemos por M_S el conjunto de fracciones m/s, con $m \in M$, $s \in S$, identificando dos fracciones m/s y m'/s' cuando exista $s'' \in S$ tal que $s''(s' \cdot m - s \cdot m') = 0$; se ve fácilmente que M_S es un A_S-módulo, y que la aplicación

$$a/s \otimes m \to a \cdot m/s$$

es un isomorfismo de $A_S \otimes_A M$ sobre M_S, lo que nos reduce a probar que la sucesión

$$M_S \to M'_S \to M''_S$$

es exacta, lo cual es inmediato.

Proposición 56. *$\mathcal{A}(M) = 0$ implica que $M = 0$.*

Sea m un elemento de M; si $\mathcal{A}(M) = 0$, se tiene que $1 \otimes m = 0$ en $\mathcal{O}_x \otimes_A M$ para todo $x \in V$. Según lo que precede, $1 \otimes m = 0$ equivale a la existencia de un elemento $s \in A$, $s(x) \neq 0$, tal que $s \cdot m = 0$; el anulador de m en M no está entonces contenido en ningún ideal maximal de A, lo que implica que es igual a A, dando que $m = 0$.

Proposición 57. *Si M es un A-módulo de tipo finito, $\mathcal{A}(M)$ es un haz algebraico coherente sobre V.*

[8] N. del T.: Los *caracteres* de una K-álgebra A son los morfismos de A en K, o puntos racionales de A.

Como M es de tipo finito y A es noetheriano, M es isomorfo al conúcleo de un morfismo $\varphi : A^q \to A^p$, y $\mathcal{A}(M)$ es isomorfo al conúcleo de $\mathcal{A}(\varphi) : \mathcal{A}(A^q) \to \mathcal{A}(A^p)$. Como $\mathcal{A}(A^p) = \mathcal{O}^p$ y $\mathcal{A}(A^q) = \mathcal{O}^q$, resulta entonces que $\mathcal{A}(M)$ es coherente.

49. Módulo asociado a un haz algebraico. Sea $\mathcal{F}$ un haz algebraico sobre V, y sea $\Gamma(\mathcal{F}) = \Gamma(V, \mathcal{F})$; como $\mathcal{F}$ es un haz de $\mathcal{O}$-módulos, $\Gamma(\mathcal{F})$ está dotado de una estructura natural de A-módulo. Todo morfismo algebraico $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ define un A-morfismo $\Gamma(\varphi) : \Gamma(\mathcal{F}) \to \Gamma(\mathcal{G})$. Si se tiene una sucesión exacta de haces coherentes $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, la sucesión

$$\Gamma(\mathcal{F}) \to \Gamma(\mathcal{G}) \to \Gamma(\mathcal{H})$$

es exacta (ver nº 45); al aplicar esto a una sucesión exacta $\mathcal{O}^p \to \mathcal{F} \to 0$, se ve que $\Gamma(\mathcal{F})$ es un A-módulo de finito generado.

Los funtores $\mathcal{A}(M)$ y $\Gamma(\mathcal{F})$ son "inversos" el uno del otro:

TEOREMA 10. *(a) Si M es un A-módulo de tipo finito, $\Gamma(\mathcal{A}(M))$ es canónicamente isomorfo a M.*

(b) Si $\mathcal{F}$ es un haz algebraico coherente sobre V, $\mathcal{A}(\Gamma(\mathcal{F}))$ es canónicamente isomorfo a $\mathcal{F}$.

Primero demostremos (a). Todo elemento $m \in M$ define una sección $\alpha(m)$ de $\mathcal{A}(M)$ por la fórmula: $\alpha(m)(x) = 1 \otimes m \in \mathcal{O}_x \otimes_A M$; lo que da un morfismo $\alpha : M \to \Gamma(\mathcal{A}(M))$. Cuando M es un módulo libre finitamente generado, α es biyectivo (basta verlo cuando $M = A$, donde es evidente); si M es un módulo finitamente generado cualquiera, existe una sucesión exacta $L^1 \to L^0 \to M \to 0$, donde L^0 y L^1 son libres finitamente generados; la sucesión $\mathcal{A}(L^1) \to \mathcal{A}(L^0) \to \mathcal{A}(M) \to 0$ es exacta, luego también lo es la sucesión $\Gamma(\mathcal{A}(L^1)) \to \Gamma(\mathcal{A}(L^0)) \to \Gamma(\mathcal{A}(M)) \to 0$. El diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
L^1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & L^0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \arrow[d, "\alpha"] \\
\Gamma(\mathcal{A}(L^1)) \arrow[r] & \Gamma(\mathcal{A}(L^0)) \arrow[r] & \Gamma(\mathcal{A}(M)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

muestra entonces que $\alpha : M \to \Gamma(\mathcal{A}(M))$ es biyectivo, lo que demuestra (a).

Sea ahora $\mathcal{F}$ un haz algebraico coherente sobre V. Si se asocia a todo $s \in \Gamma(\mathcal{F})$ el elemento $s(x) \in \mathcal{F}_x$, se obtiene un A-morfismo: $\Gamma(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}_x$ que se prolonga a un $\mathcal{O}_x$-morfismo $\beta_x : \mathcal{O}_x \otimes_A \Gamma(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}_x$; se verifica fácilmente que los β_x forman un morfismo de haces $\beta : \mathcal{A}(\Gamma(\mathcal{F})) \to \mathcal{F}$. Cuando $\mathcal{F} = \mathcal{O}^p$, el morfismo β es biyectivo; como resultado, por el mismo razonamiento de antes, β es biyectivo para todo haz algebraico coherente $\mathcal{F}$, lo que demuestra (b).

OBSERVACIONES. (1) Se puede igualmente deducir (b) de (a); ver nº 65, demostración de la Proposición 78. (2) Veremos en el Capítulo III cómo modificar la correspondencia precedente para estudiar los haces coherentes sobre el espacio proyectivo.

50. Módulos proyectivos y fibrados vectoriales. Recordamos ([**6**], Cap. I, th. 2.2) que un A-módulo M se dice que es *proyectivo* si es sumando directo de un A-módulo libre.

PROPOSICIÓN 58. *Sea M un A-módulo finitamente generado. Para que M sea proyectivo, es necesario y suficiente que el $\mathcal{O}_x$-módulo $\mathcal{O}_x \otimes_A M$ sea libre para cada $x \in V$.*

Si M es proyectivo, $\mathcal{O}_x \otimes_A M$ es $\mathcal{O}_x$-proyectivo, luego $\mathcal{O}_x$-libre porque $\mathcal{O}_x$ es un anillo local (ver [**6**], Cap. VIII, th. 6.1').

Recíprocamente, si todos los $\mathcal{O}_x \otimes_A M$ son libres, se tiene (ver [**6**], Cap. VII, Ejer. 11)

$$\dim(M) = \sup_{x \in V} \dim(\mathcal{O}_x \otimes_A M) = 0$$

lo que implica que M es proyectivo ([**6**], Cap. VI, §2).

Observamos que, si $\mathcal{F}$ es un haz algebraico coherente sobre V y $\mathcal{F}_x$ es isomorfo a $\mathcal{O}_x^p$, $\mathcal{F}$ es isomorfo a $\mathcal{O}^p$ sobre un entorno de x; si esta propiedad se verifica en todo punto $x \in V$, el haz $\mathcal{F}$ es entonces localmente isomorfo a un haz $\mathcal{O}^p$, con el entero p constante sobre toda componente conexa de V. Aplicando esto al haz $\mathcal{A}(M)$, se obtiene:

COROLARIO. *Sea $\mathcal{F}$ un haz algebraico coherente sobre una variedad afín conexa V. Las tres propiedades siguientes son equivalentes:*

(i) $\Gamma(\mathcal{F})$ *es un A-módulo proyectivo.*
(ii) $\mathcal{F}$ *es localmente isomorfo a un haz $\mathcal{O}^p$.*
(iii) $\mathcal{F}$ *es isomorfo al haz de gérmenes de secciones de un fibrado vectorial algebraico con base V.*

Asimismo, la aplicación $E \to \Gamma(\mathcal{S}(E))$ (donde E designa un espacio fibrado con fibra vectorial) pone en correspondencia biunívoca las clases de espacios fibrados y las clases de A-módulos proyectivos finitamente generados; un fibrado *trivial* corresponde a un módulo *libre*, y recíprocamente.

Señalamos que, cuando $V = K^r$ (en cuyo caso $A = K[X_1, \ldots, X_r]$), se ignora si existen A-módulos proyectivos finitamente generados que no sean libres, o, equivalentemente, si existen fibrados vectoriales de base K^r no triviales.

Capítulo III. Haces algebraicos coherentes sobre variedades proyectivas

§1. Variedades proyectivas

51. Notaciones. (Las notaciones introducidas a continuación serán utilizadas sin referencia durante el resto del capítulo).

Sea r un entero ≥ 0 y sea $Y = K^{r+1} - \{0\}$; el grupo multiplicativo K^* de los elementos $\neq 0$ de K opera sobre Y por la fórmula:

$$\lambda(\mu_0, \ldots, \mu_r) = (\lambda\mu_0, \ldots, \lambda\mu_r).$$

Dos puntos y e y' se dirá que son equivalentes cuando exista $\lambda \in K^*$ tal que $y' = \lambda y$; el espacio cociente de Y por esta relación de equivalencia se denotará $\mathbb{P}_r(K)$, o simplemente X; es el *espacio proyectivo de dimensión r sobre K*; la proyección canónica de Y sobre X será denotada π.

Sea $I = \{0, 1, \ldots r\}$; para todo $i \in I$, designaremos por t_i la función coordenada i-ésima de K^{r+1}, definida por la fórmula:

$$t_i(\mu_0, \ldots, \mu_r) = \mu_i.$$

Designaremos por V_i el subconjunto abierto de K^{r+1} formado por los puntos donde t_i es $\neq 0$, y por U_i la imagen de V_i por π; los $\{U_i\}_{i \in I}$ forman un recubrimiento $\mathfrak{U}$ de X. Si $i \in I$ y $j \in I$, la función t_j/t_i es regular en V_i, e invariante por K^*, luego define una función sobre U_i que denotaremos también t_j/t_i; para i fijo, las funciones t_j/t_i, $j \neq i$, definen una biyección $\psi_i : U_i \to K^r$.

Dotaremos a K^{r+1} de su estructura de variedad algebraica, y a Y de la estructura inducida. Igualmente dotaremos a X de la topología cociente de la de Y: un subconjunto cerrado de X es entonces la imagen por π de un cono cerrado de K^{r+1}. Si U es abierto en X, pondremos $A_U = \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_Y)$; es el anillo de funciones regulares sobre $\pi^{-1}(U)$. Sea A_U^0 el subanillo de A_U formado por los elementos invariantes por K^* (es decir, las funciones homogéneas de grado 0). Cuando $V \supset U$, se tiene un morfismo de restricción $\varphi_U^V : A_V^0 \to A_U^0$, y el sistema de los (A_U^0, φ_U^V) define un haz $\mathcal{O}_X$ que se puede considerar como un subhaz del haz $\mathcal{F}(X)$ de gérmenes de funciones en X. Para que una función f, definida en un entorno de x, pertenezca a $\mathcal{O}_{x,X}$, es necesario y suficiente que coincida localmente con una función de la forma P/Q, donde P y Q son polinomios homogéneos del mismo grado en $t_0, \ldots, t_r$, con $Q(y) \neq 0$ para $y \in \pi^{-1}(x)$ (lo que expresaremos más brevemente poniendo $Q(x) \neq 0$).

Proposición 59. *El espacio proyectivo $X = \mathbb{P}_r(K)$, dotado de la topología y el haz precedentes, es una variedad algebraica.*

Los U_i, $i \in I$, son abiertos de X, y se verifica fácilmente que las biyecciones $\psi_i : U_i \to K^r$ definidas antes son isomorfismos birregulares, lo que demuestra que se cumple el axioma (VA_I). Para demostrar que también se cumple (VA_{II}), falta ver que el subconjunto de $K^r \times K^r$ formado por las parejas $(\psi_i(x), \psi_j(x))$, donde $x \in U_i \cap U_j$, es cerrado, lo que no presenta dificultades.

En lo que sigue, X estará siempre dotado de la estructura de variedad algebraica que acabamos de definir; el haz $\mathcal{O}_X$ será denotado simplemente $\mathcal{O}$. Una variedad algebraica V se dirá que es *proyectiva* si es isomorfa a una subvariedad cerrada de un espacio proyectivo. El estudio de los haces algebraicos coherentes sobre las variedades proyectivas puede reducirse al estudio de los haces algebraicos coherentes sobre los $\mathbb{P}_r(K)$, ver nº 39.

52. Cohomología de subvariedades del espacio proyectivo. Aplicamos el Teorema 8 de nº 47 al recubrimiento $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ definido en el nº anterior: se puede hacer porque cada U_i es isomorfo a K^r. Se obtiene así:

Proposición 60. *Si $\mathcal{F}$ es un haz algebraico coherente sobre $X = \mathbb{P}_r(K)$, el morfismo $\sigma(\mathfrak{U}) : H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^n(X, \mathcal{F})$ es biyectivo para todo $n \geq 0$.*

Como $\mathfrak{U}$ está formado por $r+1$ abiertos, se tiene (ver nº 20, corolario a la Proposición 21):

Proposición 61. *$H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ para $n > r$.*

El último resultado se puede generalizar de la siguiente manera:

Proposición 62. *Sea V una variedad algebraica, isomorfa a una subvariedad localmente cerrada de un espacio proyectivo X. Sea $\mathcal{F}$ un haz algebraico coherente sobre V, y sea W una subvariedad de V tal que $\mathcal{F}$ es nulo fuera de W. Se tiene entonces $H^n(V, \mathcal{F}) = 0$ para $n > \dim W$.*

En particular, poniendo $W = V$ se ve que se tiene:

Corolario. *$H^n(V, \mathcal{F}) = 0$ para $n > \dim V$.*

Identifiquemos V con una subvariedad localmente cerrada de $X = \mathbb{P}_r(K)$; existe un abierto U de X tal que V es cerrado en U. Supondremos que W es cerrado en V, lo que es evidentemente lícito; entonces W es cerrada en U. Pongamos $F = X - U$. Antes de demostrar la Proposición 62, establezcamos dos lemas:

Lema 10. *Sea $k = \dim W$; existen $k+1$ polinomios homogéneos $P_i(t_0, \dots t_r)$, de grados > 0, nulos sobre F, y que no se anulan simultáneamente sobre W.*

(Abusando del lenguaje, se dice que un polinomio homogéneo P se anula en un punto x de $\mathbb{P}_r(K)$ si se anula sobre $\pi^{-1}(x)$).

Razonamos por recurrencia sobre k, siendo trivial el caso $k = -1$. Escogemos un punto en cada componente irreducible de W, y sea P_1 un polinomio homogéneo nulo sobre F, de grado > 0, y que no se anula en alguno de estos puntos (la existencia de P_1 resulta de que F es cerrado, habida cuenta de la definición de la topología de $\mathbb{P}_r(K)$). Sea W' la subvariedad de W formada por los puntos $x \in W$ tales que $P_1(x) = 0$; viendo la construcción de P_1, alguna componente irreducible de W no está contenida en W', y se sigue (ver nº 36) que $\dim W' < k$. Aplicando la hipótesis de recurrencia a W', se ve que existen k polinomios homogéneos $P_2, \dots, P_{k+1}$, nulos sobre F, y sin ceros comunes en W'; está claro que los polinomios $P_1, \dots, P_{k+1}$ verifican las condiciones deseadas.

Lema 11. *Sea $P(t_0, \dots, t_r)$ un polinomio homogéneo de grado $n > 0$. El conjunto X_P de puntos $x \in X$ tales que $P(x) \neq 0$ es un abierto afín de X.*

Si se hace corresponder a cada punto $y = (\mu_0, \dots, \mu_r) \in Y$ el punto de un espacio K^N conveniente que tenga por coordenadas todos los monomios $\mu_0^{m^0 \dots \mu_r^{m_r}}$, $m_0 + \dots + m_r = n$, se obtiene, por paso al cociente, una aplicación $X \to \mathbb{P}_{N-1}(K)$. Es un hecho clásico, además fácil de verificar, que φ_n es un isomorfismo birregular de X sobre una subvariedad cerrada de $\mathbb{P}_{N-1}(K)$ ("variedad de Veronese"); ahora bien φ_n transforma el abierto X_P en el lugar de los puntos de $\varphi_n(X)$ fuera de cierto hiperplano de $\mathbb{P}_{N-1}(K)$; como el complementario de un hiperplano es isomorfo a un espacio afín, se concluye que X_P es en efecto isomorfo a una subvariedad cerrada de un espacio afín.

Demostremos ahora la Proposición 62. Prolongamos el haz $\mathcal{F}$ por 0 a $U - V$; obtenemos un haz algebraico coherente sobre U, que denotaremos también por $\mathcal{F}$, y se sabe (ver n$^{\text{o}}$ 26) que $H^n(U, \mathcal{F}) = H^n(V, \mathcal{F})$. Sean por otro lado $P_1, \dots, P_{k+1}$ polinomios homogéneos verificando las condiciones del Lema 10; sean $P_{k+2}, \dots, P_h$ polinomios homogéneos de grados > 0, nulos sobre $W \cup F$, y que no se anulen simultáneamente en algún punto de $U - W$ (para obtener tales polinomios, basta tomar un sistema de generadores homogéneos del ideal definido por $W \cup F$ en $K[t_0, \dots, t_r]$). Para cada i, $1 \leq i \leq h$, sea V_i el conjunto de puntos $x \in X$ tales que $P_i(x) \neq 0$; se tiene que $V_i \subset U$, y las hipótesis hechas más arriba muestran que $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ es un recubrimiento abierto de U; además, el Lema 11 muestra que los V_i son abiertos afines, dando que $H^n(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) = H^n(U, \mathcal{F}) = H^n(V, \mathcal{F})$ para todo $n \geq 0$. Por otro lado, si $n > k$, y si los índices $i_0, \dots, i_n$ son distintos, alguno de los índices es $> k + 1$, y $V_{i_0 \dots i_n}$ no corta a W; se concluye con que el grupo de cocadenas alternadas $C'^n(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ es nulo si $n > k$, lo que implica entonces que $H^n(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) = 0$, por la Proposición 21 de n$^{\text{o}}$ 20.

53. Cohomología de curvas algebraicas irreducibles. Si V es una variedad algebraica irreducible de dimensión 1, los cerrados de V, distintos de V, son los subconjuntos *finitos*. Si F es un subconjunto finito de V, y x un punto de F, pondremos $V_x^F = (V - F) \cup \{x\}$; los V_x^F, $x \in F$, forman un recubrimiento abierto finito $\mathfrak{V}^F$ de V.

Lema 12. *Los recubrimientos $\mathfrak{V}^F$ del tipo anterior son arbitrariamente finos.*

Sea $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de V, que se puede suponer finito porque V es compacto. Se puede igualmente suponer $U_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$. Si se pone $F_i = V - U_i$, F_i es entonces finito, y lo mismo ocurre con $F = \bigcup_{i \in I} F_i$. Veamos que $\mathfrak{V}^F \prec \mathfrak{U}$, lo que probará el lema. Sea $x \in F$; existe $i \in I$ tal que $x \neq F_i$, porque los complementarios U_i recubren V; se tiene entonces $F - \{x\} \supset F_i$, porque $F \supset F_i$, lo que significa que $V_x^F \supset U_i$, y demuestra que $\mathfrak{V}^F \prec \mathfrak{U}$.

Lema 13. *Sean $\mathcal{F}$ un haz sobre V y $\mathcal{F}$ un subconjunto finito de V. Se tiene*

$$H^n(\mathfrak{V}^F, \mathcal{F}) = 0$$

para $n \geq 2$.

Pongamos $W = V - F$; está claro que $V_{x_0}^F \cap \dots \cap V_{x_n}^F = W$ si los $x_0, \dots, x_n$ son distintos, y si $n \geq 1$. Si se pone $G = \Gamma(W, \mathcal{F})$, resulta que el complejo alternado $C'(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$

es isomorfo, en dimensiones ≥ 1 a $C'(S(F), G)$, siendo $S(F)$ el símplice cuyo conjunto de vértices es F. Se sigue que

$$H^n(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) = H^n(S(F), G) = 0 \quad \text{para} n \geq 2,$$

porque la cohomología de un símplice es trivial.

Los Lemas 12 y 13 implican evidentemente:

Proposición 63. *Si V es una curva algebraica irreducible y $\mathcal{F}$ es un haz cualquiera sobre V, se tiene $H^n(V, \mathcal{F}) = 0$ para $n \geq 2$.*

Observación. Ignoro si un resultado análogo al anterior es válido para las variedades de dimensión cualquiera.

§2. Módulos graduados y haces algebraicos coherentes sobre el espacio proyectivo

54. La operación $\mathcal{F}(n)$. Sea $\mathcal{F}$ un haz algebraico sobre $X = \mathbb{P}_r(K)$. Sea $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}(U_i)$ la restricción de $\mathcal{F}$ a U_i (ver nº 51); si n un entero cualquiera, sea $\theta_{ij}(n)$ el isomorfismo de $\mathcal{F}_j(U_i \cap U_j)$ sobre $\mathcal{F}_i(U_i \cap U_j)$ definido por la multiplicación por la función t_j^n/t_i^n; lo que tiene sentido, porque t_j/t_i es una función regular en $U_i \cap U_j$ con valores en K^*. Se tiene $\theta_{ij}(n) \circ \theta_{jk}(n) = \theta_{ik}(n)$ en todo punto de $U_i \cap U_j \cap U_k$; se puede entonces aplicar la Proposición 4 de nº 4, y se obtiene así un haz algebraico, denotado $\mathcal{F}(n)$, definido pegando los haces $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}(U_i)$ a través de los isomorfismos $\theta_{ij}(n)$.

Se tienen isomorfismos canónicos: $\mathcal{F}(0) \cong \mathcal{F}$, $\mathcal{F}(n)(m) \cong \mathcal{F}(n+m)$. Además, $\mathcal{F}(n)$ es localmente isomorfo a $\mathcal{F}$, luego es coherente si $\mathcal{F}$ lo es; resulta igualmente que toda sucesión exacta $\mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}''$ de haces algebraicos da lugar a una sucesión exacta $\mathcal{F}(n) \to \mathcal{F}'(n) \to \mathcal{F}''(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Se puede aplicar lo que precede al haz $\mathcal{F} = \mathcal{O}$, y se obtienen así los haces $\mathcal{O}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Vamos a dar otra descripción de estos haces: si U es abierto en X, sea A_U^n el subconjunto de $A_U = \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_Y)$ formado por las funciones homogéneas de grado n (es decir, verificando la identidad $f(\lambda y) = \lambda^n f(y)$ para $\lambda \in K^*$ e $y \in \pi^{-1}(U)$); los A_U^n son A_U^0-módulos, luego dan lugar a un haz algebraico, que denotaremos por $\mathcal{O}'(n)$. Un elemento de $\mathcal{O}'(n)_x$, $x \in X$, se puede identificar con una fracción racional P/Q, siendo P y Q polinomios homogéneos tales que $Q(x) \neq 0$ y $\mathrm{gr}P - \mathrm{gr}Q = n$.

Proposición 64. *Los haces $\mathcal{O}(n)$ y $\mathcal{O}'(n)$ son canónicamente isomorfos.*

Por definición, una sección de $\mathcal{O}(n)$ sobre un abierto $U \subset X$ es un sistema (f_i) de secciones de $\mathcal{O}$ sobre los $U \cap U_i$, con $f_i = (t_j^n/t_i^n) \cdot f_j$ sobre $U \cap U_i \cap U_j$; las f_j se pueden identificar con funciones regulares y homogéneas de grado 0 sobre los $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(U_i)$; pongamos $g_i = t_i^n \cdot f_i$; se tiene entonces $g_i = g_j$ en todo punto de $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(U_i) \cap \pi^{-1}(U_j)$, luego las g_i son restricciones de una única función regular sobre $\pi^{-1}(U)$, y homogénea de grado n. Inversamente, una tal función g define un sistema (f_i) al poner $f_i = g/t_i^n$. La aplicación $(f_i) \to g$ es entonces un isomorfismo de $\mathcal{O}(n)$ en $\mathcal{O}'(n)$.

En lo que sigue, identificaremos casi siempre $\mathcal{O}(n)$ y $\mathcal{O}'(n)$ a través del isomorfismo anterior. Se observará que una sección de $\mathcal{O}'(n)$ sobre X no es más que una función regular sobre X y homogénea de grado n. Suponiendo que $r \geq 1$, una tal función es idénticamente nula para $n < 0$, y es un *polinomio* homogéneo de grado n para $n \geq 0$.

PROPOSICIÓN 65. *Para todo haz algebraico $\mathcal{F}$, los haces $\mathcal{F}(n)$ y $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(n)$ son canónicamente isomorfos.*

Como $\mathcal{O}(n)$ se obtiene pegando los $\mathcal{O}_i$ a través de los $\theta_{ij}(n)$, $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(n)$ se obtiene a partir de los $\mathcal{F}_i \otimes \mathcal{O}_i$ pegados entre sí por los isomorfismos $1 \otimes \theta_{ij}(n)$; identificando $\mathcal{F}_i \otimes \mathcal{O}_i$ con $\mathcal{F}_i$, se recupera la definición de $\mathcal{F}(n)$.

En lo que sigue, haremos igualmente la identificación de $\mathcal{F}(n)$ y de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(n)$.

55. Secciones de $\mathcal{F}(n)$. Demostremos primero un lema sobre variedades afines, que es totalmente análogo al Lema 8 del nº 45:

LEMA 14. *Sean V una variedad afín, Q una función regular sobre V y V_Q el conjunto de puntos $x \in V$ tales que $Q(x) \neq 0$. Sea $\mathcal{F}$ un haz algebraico coherente sobre V, y sea s una sección de $\mathcal{F}$ a lo largo de V_Q. Entonces, para todo n lo bastante grande, existe una sección s' de $\mathcal{F}$ sobre todo V tal que $s' = Q^n s$ a lo largo de V_Q.*

Sumergiendo V en un espacio afín y prolongando $\mathcal{F}$ por 0 fuera de V, se reduce al caso en que V es un espacio afín, luego irreducible. Según el primer Corolario al Teorema 6 del nº 45, existe un morfismo epiyectivo $\varphi : \mathcal{O}_V^p \to \mathcal{F}$; según la Proposición 48 del nº 42, V_Q es un abierto afín, y existe entonces (nº 44, segundo Corolario a la Proposición 53) una sección σ de $\mathcal{O}_V^p$ sobre V_Q tal que $\varphi(\sigma) = s$. Se puede identificar σ con un sistema de p funciones regulares sobre V_Q; aplicando a cada una de estas funciones la Proposición 51 del nº 43, se ve que existe una sección σ' de $\mathcal{O}_V^p$ sobre V tal que $\sigma' = Q^n \sigma$ sobre V_Q, si n es lo bastante grande. Al poner $s' = \varphi(\sigma')$, se obtiene finalmente una sección de $\mathcal{F}$ sobre V tal que $s' = Q^n s$ sobre V_Q.

TEOREMA 11. *Sea $\mathcal{F}$ un haz algebraico coherente sobre $X = \mathbb{P}_r(K)$. Existe un entero $n(\mathcal{F})$ tal que, para todo $n \geq n(\mathcal{F})$, y todo $x \in X$, el $\mathcal{O}_x$-módulo $\mathcal{F}(n)_x$ está generado por los elementos de $\Gamma(X, \mathcal{F}(n))$.*

Por definición de $\mathcal{F}(n)$, una sección s de $\mathcal{F}(n)$ sobre X es un sistema (s_i) de secciones de $\mathcal{F}$ sobre los U_i, verificando las condiciones de coherencia:

$$s_i = (t_j^n / t_i^n) \cdot s_j \quad \text{sobre} \quad U_i \cap U_j;$$

diremos que s_i es la *i-ésima componente de s*.

Por otro lado, como U_i es isomorfo a K^r, existe un número finito de secciones s_i^α de $\mathcal{F}$ sobre U_i que generan $\mathcal{F}_x$ para todo $x \in U_i$ (nº 45, primer Corolario al Teorema 6); si, para cierto entero n, se pueden encontrar secciones s^α de $\mathcal{F}(n)$ cuyas i-ésimas componentes sean las s_i^α, es evidente que $\Gamma(X, \mathcal{F}(n))$ genera $\mathcal{F}(n)_x$ para todo $x \in U_i$. El Teorema 11 quedará demostrado cuando probemos el siguiente Lema:

LEMA 15. *Sea s_i una sección de $\mathcal{F}$ a lo largo de U_i. Para todo n lo bastante grande, existe una sección s de $\mathcal{F}(n)$ cuya componente i-ésima es igual a s_i.*

Aplicamos el Lema 14 a la variedad afín $V = U_j$, la función $Q = t_i/t_j$ y la sección s_i restringida a $U_i \cap U_j$; esto es lícito, porque t_i/t_j es una función regular sobre U_j cuyos ceros están en $U_j - U_i \cap U_j$. Se concluye con que existe un entero p y una sección s'_j de $\mathcal{F}$ sobre U_j tales que $s'_j = (t_i^p/t_j^p) \cdot s_i$ sobre $U_i \cap U_j$; para $j = i$, esto implica que $s'_i = s_i$, lo que permite escribir la fórmula precedente $s'_j = (t_i^p/t_j^p) \cdot s'_i$.

Definidas las s'_j para cada índice j (con el mismo exponente p, consideramos $s'_j - (t_k^p/t_j^p) \cdot s'_k$); es una sección de $\mathcal{F}$ sobre $U_j \cap U_k$ cuya restricción a $U_i \cap U_j \cap U_k$ es nula; aplicándole la Proposición 52 del nº 43, se ve que, para todo entero q lo bastante grande, se tiene $(t_i^q/t_j^q)(s'_j - (t_k^p/t_j^p) \cdot s'_k) = 0$ sobre $U_j \cap U_j$; si se pone entonces $s_j = (t_i^q/t_j^q) \cdot s'_j$ y $n = p + q$, la fórmula anterior se escribe $s_j = (t_k^n/t_j^n) \cdot s_k$, y el sistema $s = (s_j)$ define una sección de $\mathcal{F}(n)$ cuya i-ésima componente es igual a s_i.

COROLARIO. *Todo haz algebraico coherente $\mathcal{F}$ sobre $X = \mathbb{P}_r(K)$ es isomorfo a un haz cociente de un haz $\mathcal{O}(n)^p$, para ciertos enteros n y p.*

Según el teorema anterior, existe un entero n tal que $\mathcal{F}(-n)_x$ está generado por $\Gamma(X, \mathcal{F}(-n))$ para todo $x \in X$; por la compacidad de X, esto equivale a decir que $\mathcal{F}(-n)$ es isomorfo a un haz cociente del haz $\mathcal{O}^p$, para cierto entero $p \geq 0$. Resulta entonces que $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}(-n)(n)$ es isomorfo a un haz cociente de $\mathcal{O}(n)^p \cong \mathcal{O}^p(n)$.

56. Módulos graduados. Sea $S = K[t_0, \ldots, t_r]$ el álgebra de polinomios con incógnitas $t_0, \ldots, t_r$; para todo entero $n \geq 0$, sea S_n el subespacio vectorial de S formado por los polinomios homogéneos de grado n; para $n < 0$, se pondrá $S_n = 0$. El álgebra S es suma directa de los S_n, $n \in \mathbb{Z}$, y se tiene $S_p S_q \subset S_{p+q}$; dicho de otra forma, S es una *álgebra graduada*.

Recordamos que un S-módulo se dice que es *graduado* cuando se tiene una descomposición de M como suma directa: $M = \sum_{n \in \mathbb{Z}} M_n$, siendo los M_n subgrupos de M tales que $S_p M_q \subset M_{p+q}$, para toda pareja de enteros (p, q). Un elemento de M_n se dice que es *homogéneo* de grado n; un submódulo N de M se dice *homogéneo* si es la suma directa de los $N \cap M_n$, en cuyo caso es un S-módulo graduado. Si M y M' son S-módulos graduados, un S-morfismo

$$\varphi : M \to M'$$

se dice que es *homogéneo de grado s* si $\varphi(M_n) \subset M'_{n+s}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Un S-morfismo de grado 0 se llamará simplemente *morfismo*.

Si M es un S-módulo graduado y n es entero, denotaremos $M(n)$ al S-módulo graduado:

$$M(n) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} M(n)_p, \quad \text{con} \quad M(n)_p = M_{n+p}.$$

Se tiene entonces $M(n) = M$ en tanto que S-módulo, pero un elemento homogéneo de grado p en $M(n)$ es homogéneo de grado $n + p$ en M; dicho de otra forma, $M(n)$ se deduce de M bajando los grados n unidades.

Denotaremos por $\mathcal{C}$ la clase de S-módulos graduados M tales que $M_n = 0$ para n lo bastante grande. Si $A \to B \to C$ es una sucesión exacta de morfismos de S-módulos graduados, las relaciones $A \in \mathcal{C}$ y $C \in \mathcal{C}$ implican evidentemente que $B \in \mathcal{C}$; dicho de otra forma, $\mathcal{C}$ es en efecto una clase, en el sentido de [**14**], Cap. I. De manera general, utilizaremos la terminología introducida en el artículo mencionado; en particular, un morfismo $\varphi : A \to B$ se dirá que es $\mathcal{C}$-*inyectivo* (resp. $\mathcal{C}$-*epiyectivo*) si $\ker(\varphi) \in \mathcal{C}$ (resp. si $\operatorname{Coker}(\varphi) \in \mathcal{C}$), y $\mathcal{C}$-biyectivo si es a la vez $\mathcal{C}$-inyectivo y $\mathcal{C}$-epiyectivo.

Un S-módulo graduado M se dice que está *finitamente generado* si está generado por un número finito de elementos; diremos que M *verifica la condición* (TF) si existe un entero p tal que el submódulo $\sum_{n \geq p} M_n$ de M sea de tipo finito; es lo mismo que decir que M es $\mathcal{C}$-isomorfo a un módulo finitamente generado. Los módulos que verifican (TF) forman una clase contenida en $\mathcal{C}$.

Un S-módulo graduado L se dice que es *libre* (resp. *libre finitamente generado*) si admite una base (resp. una base finita) formada por elementos homogéneos, equivalentemente si es isomorfo a una suma directa (resp. una suma directa finita) de módulos $S(n_i)$.

57. Haz algebraico asociado a un S-módulo graduado. Si U es un subconjunto no vacío de X, denotaremos $S(U)$ el subconjunto de $S = K[t_0, \ldots, t_r]$ formado por los polinomios homogéneos Q tales que $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in U$; $S(U)$ es un sistema multiplicativo de S que no contiene al 0. Para $U = \{x\}$, se escribirá $S(x)$ en vez de $S(\{x\})$.

Sea M un S-módulo graduado. Designaremos por M_U el conjunto de fracciones m/Q, con $m \in M$, $Q \in S(U)$, siendo m y Q homogéneos del *mismo* grado; se identifican dos fracciones m/Q y m'/Q' cuando existe $Q'' \in S(U)$ tal que

$$Q''(Q' \cdot m - Q \cdot m') = 0;$$

está claro que esto define una relación de equivalencia entre parejas (m, Q). Para $U = x$, se escribirá M_x en vez de $M_{\{x\}}$.

Al aplicar esto a $M = S$, se encuentra para S_U el anillo de fracciones racionales P/Q, donde P y Q son polinomios homogéneos del mismo grado y $Q \in S(U)$; si M es un S-módulo graduado cualquiera, se puede dotar a M_U de una estructura de S_U-módulo como sigue:

$$m/Q + m'/Q' = (Q'm + Qm')/QQ'$$
$$(P/Q) \cdot (m/Q') = Pm/QQ'.$$

Si $U \subset V$, se tiene $S(V) \subset S(U)$, dando morfismos canónicos

$$\varphi_U^V : M_V \to M_U;$$

el sistema (M_U, φ_U^V), donde U y V recorren los abiertos no vacíos de X, define entonces un haz que denotaremos $\mathcal{A}(M)$; se verifica de inmediato que

$$\lim_{x \in U} M_U = M_x,$$

es decir que $\mathcal{A}(M)_x = M_x$. Se tiene en particular $\mathcal{A}(S) = \mathcal{O}$, y como los M_U son S_U-módulos, $\mathcal{A}(M)$ es un haz de $\mathcal{A}(S)$-módulos, es decir un *haz algebraico* sobre X. Todo morfismo $\varphi : M \to M'$ define de modo natural morfismos S_U-lineales $\varphi_U : M_U \to M'_U$, dando un morfismo de haces $\mathcal{A}(\varphi) : \mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(M')$, que denotaremos casi siempre como φ. Se tiene evidentemente

$$\mathcal{A}(\varphi + \psi) = \mathcal{A}(\varphi) + \mathcal{A}(\psi), \quad \mathcal{A}(1) = 1, \quad \mathcal{A}(\varphi \circ \psi) = \mathcal{A}(\varphi) \circ \mathcal{A}(\psi).$$

La operación $\mathcal{A}(M)$ es entonces un *funtor aditivo covariante*, definido sobre la categoría de S-módulos graduados, y con valores en la categoría de haces algebraicos sobre X.

(Las definiciones de arriba son totalmente análogas a las de la §4 del Cap. II; nótese no obstante que S_U *no es* la localización de S en $S(U)$, sino solamente su componente homogénea de grado 0).

58. Propiedades básicas del funtor $\mathcal{A}(M)$.

Proposición 66. *El funtor $\mathcal{A}(M)$ es un funtor exacto.*

Sea $M \xrightarrow{\alpha} M' \xrightarrow{\beta} M''$ una sucesión exacta de S-módulos graduados, y veamos que la sucesión $M_x \xrightarrow{\alpha} M'_x \xrightarrow{\beta} M''_x$ también es exacta. Sea $m'/Q \in M'_x$ un elemento del núcleo de β; viendo la definición de M''_x, existe $R \in S(x)$ tal que $R\beta(m') = 0$; pero entonces existe $m \in M$ tal que $\alpha(m) = Rm'$, y se tiene que $\alpha(m/RQ) = m'/Q$. (Comparar con el Lema 9 del nº 48).

Proposición 67. *Si M es un S-módulo graduado y n es entero, $\mathcal{A}(M(n))$ es canónicamente isomorfo a $\mathcal{A}(M)(n)$.*

Sean $i \in I$, $x \in U_i$ y $m/Q \in M(n)_x$, con $m \in M(n)_p$, $Q \in S(x)$, gr$Q = p$. Pongamos:

$$\eta_{i,x}(m/Q) = m/t_i^n Q \in M_x,$$

lo cual es lícito porque $m \in M_{n+p}$ y $t_i^n Q \in S(x)$. Se ve inmediatamente que $\eta_{i,x} : M(n)_x \to M_x$ es biyectivo para todo $x \in U_i$, y define un isomorfismo η_i de $\mathcal{A}(M(n))$ en $\mathcal{A}(M)$ sobre U_i. Por otro lado, se tiene $\eta_i \circ \eta_j^{-1} = \theta_{ij}(n)$ sobre $U_i \cap U_j$. Viendo la definición de la operación $\mathcal{F}(n)$ y la Proposición 4 del nº 4, queda demostrado que $\mathcal{A}(M(n))$ es isomorfo a $\mathcal{A}(M)(n)$.

Corolario. *$\mathcal{A}(S(n))$ es canónicamente isomorfo a $\mathcal{O}(n)$.*

En efecto, ya se ha dicho que $\mathcal{A}(S)$ es isomorfo a $\mathcal{O}$.

(Es sin embargo evidente directamente que $\mathcal{A}(S(n))$ es isomorfo a $\mathcal{O}'(n)$, puesto que $\mathcal{O}'(n)_x$ está precisamente formado por las fracciones racionales P/Q, tales que gr$P-$gr$Q = n$, y $Q \in S(x)$).

Proposición 68. *Sea M un S-módulo graduado verificando la condición* (TF)*. El haz algebraico $\mathcal{A}(M)$ es entonces un haz coherente, y para que $\mathcal{A}(M) = 0$ es necesario y suficiente que $M \in \mathcal{C}$.*

Si $M \in \mathcal{C}$, para todo $m \in M$ y todo $x \in X$, existe $Q \in S(x)$ tal que $Qm = 0$: basta tomar Q de grado lo bastante grande; se tiene entonces $M_x = 0$, dando que $\mathcal{A}(M) = 0$. Sea ahora M un S-módulo graduado verificando la condición (TF); existe un submódulo N de M, finitamente generado, tal que $M/N \in \mathcal{C}$; al aplicar lo anterior, así como la Proposición 66, se ve que $\mathcal{A}(N) \to \mathcal{A}(M)$ es biyectivo, y basta entonces probar que $\mathcal{A}(N)$ es coherente. Como N es finitamente generado, existe una sucesión exacta $L^1 \to L^0 \to N \to 0$, donde L^0 y L^1 son módulos *libres* finitamente generados. Por la Proposición 66, la sucesión $\mathcal{A}(L^1) \to \mathcal{A}(L^0) \to \mathcal{A}(N) \to 0$ es exacta. Pero, por el corolario a la Proposición 67, $\mathcal{A}(L^0)$ y $\mathcal{A}(L^1)$ son isomorfos a sumas directas finitas de haces $\mathcal{O}(n_i)$, luego son coherentes. Se sigue entonces que $\mathcal{A}(N)$ es coherente.

Sea finalmente M un S-módulo graduado verificando (TF), y tal que $\mathcal{A}(M) = 0$; por lo de antes, se puede suponer que M es finitamente generado. Si m es un elemento homogéneo de M, sea $\mathfrak{a}_m$ el anulador de m, es decir el conjunto de polinomios $Q \in S$ tales que $Q \cdot m = 0$; es claro que $\mathfrak{a}_m$ es un ideal homogéneo. Además, la hipótesis $M_x = 0$ para todo $x \in X$ implica que la variedad de ceros de $\mathfrak{a}_m$ en K^{r+1} es vacía o se reduce a $\{0\}$; el teorema de los ceros de Hilbert muestra entonces que todo polinomio homogéneo de grado lo bastante grande pertenece a $\mathfrak{a}_m$. Aplicando esto a un sistema finito de generadores de M, se concluye que $M_p = 0$ para p lo bastante grande, lo que concluye la demostración.

Combinando las Proposiciones 66 y 68 se obtiene:

Proposición 69. *Sean M y M' dos S-módulos graduados verificando la condición* (TF)*, y sea $\varphi : M \to M'$ un morfismo de M en M'. Para que*

$$\mathcal{A}(\varphi) : \mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(M')$$

sea inyectivo (resp. epiyectivo, biyectivo), es necesario y suficiente que el morfismo φ sea $\mathcal{C}$-inyectivo (resp. $\mathcal{C}$-epiyectivo, $\mathcal{C}$-biyectivo).

59. S-módulo graduado asociado a un haz algebraico Sea $\mathcal{F}$ un haz algebraico sobre X, y pongamos:

$$\Gamma(\mathcal{F}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma(\mathcal{F})_n, \quad \text{con} \quad \Gamma(\mathcal{F})_n = \Gamma(X, \mathcal{F}(n)).$$

El grupo $\Gamma(\mathcal{F})$ es un grupo graduado; vamos a dotarlo de una estructura de S-módulo. Sea $s \in \Gamma(X, \mathcal{F}(q))$ y sea $P \in S_p$; se puede identificar P con una sección de $\mathcal{O}(p)$ (ver nº 54), luego $P \otimes s$ es una sección de $\mathcal{O}(p) \otimes \mathcal{F}(q) = \mathcal{F}(q)(p) = \mathcal{F}(p+q)$, utilizando los isomorfismos del nº 54; así pues hemos definido una sección de $\mathcal{F}(p+q)$ que denotaremos $P \cdot s$ en lugar de $P \otimes s$. La aplicación $(P, s) \to P \cdot s$ dota a $\Gamma(\mathcal{F})$ de una estructura de S-módulo compatible con su graduación.

Se puede también definir $P \cdot s$ a través de sus componentes sobre los U_i: si las componentes de s son $s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$, con $s_i = (t_j^q/t_i^q) \cdot s_j$ sobre $U_i \cap U_j$, se tiene $(P \cdot s)_i = (P/t_i^p) \cdot s_i$, lo que tiene sentido porque P/t_i^p es una función regular sobre U_i.

Para poder comparar los funtores $\mathcal{A}(M)$ y $\Gamma(\mathcal{F})$ vamos a definir dos morfismos canónicos:

$$\alpha : M \to \Gamma(\mathcal{A}(M)) \quad \text{y} \quad \beta : \mathcal{A}(\Gamma(\mathcal{F})) \to \mathcal{F}\,.$$

Definición de α. Sea M un S-módulo graduado, y sea $m \in M_0$ un elemento homogéneo de grado 0 de M. El elemento $m/1$ es un elemento bien definido de M_x, y varía continuamente con $x \in X$; luego m define una sección $\alpha(M)$ de $\mathcal{A}(M)$. Si ahora m es homogéneo de grado n, m es homogéneo de grado 0 en $M(n)$, luego define una sección $\alpha(m)$ de $\mathcal{A}(M(n)) = \mathcal{A}(M)(n)$ (ver Proposición 67). De ahí la definición de $\alpha : M \to \Gamma(\mathcal{A}(M))$ y es inmediato que es un morfismo.

Definición de β. Sea $\mathcal{F}$ un haz algebraico sobre X, y sea s/Q un elemento de $\Gamma(\mathcal{F})_x$, con $s \in \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$, $Q \in S_n$, y $Q(x) \neq 0$. La función $1/Q$ es homogénea de grado $-n$, y regular en x, luego es una sección de $\mathcal{O}(-n)$ en un entorno de x; se sigue que $1/Q \otimes s$ es una sección de $\mathcal{O}(-n) \otimes \mathcal{F}(n) = \mathcal{F}$ en un entorno de x, luego define un elemento de $\mathcal{F}_x$, que denotaremos por $\beta_x(s/Q)$, que depende solo de s/Q. Se puede definir igualmente β_x utilizando las componentes s_i de s: si $x \in U_i$, $\beta_x(x/Q) = (t_i^n/Q) \cdot s_i(x)$. La colección de morfismos β_x define un morfismo $\beta : \mathcal{A}(\Gamma(\mathcal{F})) \to \mathcal{F}$.

Los morfismos α y β están relacionados por las siguientes Proposiciones, que se demuestran por cálculo directo:

Proposición 70. *Sea M un S-módulo graduado. La composición de los morfismos $\mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(\Gamma(\mathcal{A}(M))) \to \mathcal{A}(M)$ es la identidad.*

(El primer morfismo está definido por $\alpha : M \to \Gamma(\mathcal{A}(M))$, y el segundo es β aplicado a $\mathcal{F} = \mathcal{A}(M)$).

Proposición 71. *Sea $\mathcal{F}$ un haz algebraico sobre X. La composición de los morfismos $\Gamma(\mathcal{F}) \to \Gamma(\mathcal{A}(\Gamma(\mathcal{F}))) \to \Gamma(\mathcal{F})$ es la identidad.*

(El primer morfismo es α, aplicado a $M = \Gamma(\mathcal{F})$, mientras que el segundo está definido por $\beta : \mathcal{A}(\Gamma(\mathcal{F})) \to \mathcal{F}$).

Mostraremos en el nº 65 que $\beta : \mathcal{A}(\Gamma(\mathcal{F})) \to \mathcal{F}$ es biyectivo si $\mathcal{F}$ es coherente, y que $\alpha : M \to \Gamma(\mathcal{A}(M))$ es $\mathcal{C}$-biyectivo si M verifica la condición (TF).

60. Caso de haces algebraicos coherentes. Demostremos primero un resultado preliminar:

Proposición 72. *Sea $\mathcal{L}$ un haz algebraico sobre X, suma directa de un número finito de haces $\mathcal{O}(n_i)$. Entonces $\Gamma(\mathcal{L})$ verifica* (TF) *y $\beta : \mathcal{A}(\Gamma(\mathcal{L})) \to \mathcal{L}$ es biyectivo.*

Se reduce inmediatamente al caso $\mathcal{L} = \mathcal{O}(n)$, luego a $\mathcal{L} = \mathcal{O}$. En ese caso, se sabe que $\Gamma(\mathcal{O}(p)) = S_p$ para $p \geq 0$, luego se tiene $S \subset \Gamma(\mathcal{O})$, y el cociente pertenece a $\mathcal{C}$. Se sigue primero que $\Gamma(\mathcal{O})$ verifica (TF), y luego que $\mathcal{A}(\Gamma(\mathcal{O})) = \mathcal{A}(S) = \mathcal{O}$.

(Observamos que se tiene $\Gamma(\mathcal{O}) = S$ si $r \geq 1$; por el contrario, si $r = 0$, $\Gamma(\mathcal{O})$ no es un S-módulo finitamente generado).

Teorema 12. *Para todo haz algebraico coherente $\mathcal{F}$ sobre X, existe un S-módulo graduado M, verificando* (TF), *tal que $\mathcal{A}(M)$ es isomorfo a $\mathcal{F}$.*

Por el corolario al Teorema 11, existe una sucesión exacta de haces algebraicos:

$$\mathcal{L}^1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{L}^0 \to \mathcal{F} \to 0,$$

donde $\mathcal{L}^1$ y $\mathcal{L}^0$ verifican las hipótesis de la Proposición anterior. Sea M el conúcleo del morfismo $\Gamma(\varphi) : \Gamma(\mathcal{L}^1) \to \Gamma(\mathcal{L}^0)$; por la Proposición 72, M verifica la condición (TF). Aplicando el funtor $\mathcal{A}$ a la sucesión exacta:

$$\Gamma(\mathcal{L}^1) \to \Gamma(\mathcal{L}^0) \to M \to 0,$$

se obtiene la sucesión exacta:

$$\mathcal{A}(\Gamma(\mathcal{L}^1)) \to \mathcal{A}(\Gamma(\mathcal{L}^0)) \to \mathcal{A}(M) \to 0,$$

Consideramos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{A}(\Gamma(\mathcal{L}^1)) & \longrightarrow & \mathcal{A}(\Gamma(\mathcal{L}^0)) & \longrightarrow & \mathcal{A}(M) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & & & \\
\mathcal{L}^1 & \longrightarrow & \mathcal{L}^0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Por la Proposición 72, los dos morfismos verticales son biyectivos. Resulta entonces que $\mathcal{A}(M)$ es isomorfo a $\mathcal{F}$, como queríamos demostrar.

§3. Cohomología del espacio proyectivo con coeficientes en un haz algebraico coherente

61. Los complejos $C_k(M)$ y $C(M)$. Conservamos las notaciones de los n$^{\text{o}}$s n$^{\text{o}}$ 51 y n$^{\text{o}}$ 56. En particular, I designará el intervalo $\{0, 1, \ldots, r\}$ y S designará el álgebra graduada $K[t_0, \ldots, t_r]$.

Sean M un S-módulo graduado, k y q enteros ≥ 0; vamos a definir un grupo $C_k^q(M)$: un elemento de $C_k^q(M)$ es una aplicación

$$(i_0, \ldots, i_q) \to m\langle i_0 \ldots i_q \rangle$$

que hace corresponder a cada sucesión $(i_0, \ldots, i_q)$ de $q+1$ elementos de I un elemento homogéneo de grado $k(q+1)$ de M, dependiente de manera alternada de $i_0, \ldots, i_q$. En particular, se tiene $m\langle i_0 \ldots i_q \rangle = 0$ si dos de los índices $i_0, \ldots, i_q$ son iguales. Se define de forma evidente la suma en $C_k^q(M)$, así como el producto por escalares $\lambda \in K$, y $C_k^q(M)$ es un *espacio vectorial sobre* K.

Si m es un elemento de $C_k^q(M)$, definimos $dm \in C_k^{q+1}(M)$ por la fórmula:

$$(dm)\langle i_0 \dots i_{q+1}\rangle = \sum_{j=0}^{j=q+1} (-1)^j t_{i_j}^k \cdot m\langle i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{q+1}\rangle.$$

Un cálculo muestra que $d \circ d = 0$; luego la suma directa $C_k(M) = \sum_{q=0}^{q=r} C_k^q(M)$, dotada del operador coborde d, es un *complejo*, cuyo grupo de cohomología q-ésimo denotaremos por $H_k^q(M)$.

(Señalamos, según [**11**], que existe otra interpretación de los elementos de $C_k^q(M)$: introducimos $r+1$ símbolos diferenciales $dx_0, \dots, dx_r$, y hacemos corresponder a cada $m \in C_k^q(M)$ la "forma diferencial" de grado $q+1$:

$$\omega_n = \sum_{i_0 < \dots < i_q} m\langle i_0 \dots i_q\rangle dx_{i_0} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}.$$

Si se pone $\alpha_k = \sum_{i=0}^{i=r} t_i^k dx_i$, se ve que se tiene:

$$\omega_{dm} = \alpha_k \wedge \omega_m,$$

dicho de otra forma, la operación de coborde se convierte en el producto exterior por la forma α_k).

Si h es un entero $\geq k$, sea $\rho_k^h : C_k^q(M) \to C_h^q(M)$ el morfismo definido por la fórmula:

$$\rho_k^h(m)\langle i_0 \dots i_q\rangle = (t_{i_0} \dots t_{i_q})^{h-k} m\langle i_0 \dots i_q\rangle.$$

Se tiene $\rho_k^h \circ d = d \circ \rho_k^h$, y $\rho_h^l \circ \rho_k^h = \rho_k^l$ si $k \leq h \leq l$. Se puede entonces definir el complejo $C(M)$, límite inductivo del sistema $(C_k(M), \rho_k^h)$ para $k \to +\infty$. Los grupos de cohomología de este complejo serán denotados $H^q(M)$. Como la cohomología conmuta con los límites inductivos (ver [**6**], Cap. V, Prop. 9.3*), se tiene:

$$H^q(M) = \lim_{k\to\infty} H_k^q(M).$$

Todo morfismo $\varphi : M \to M'$ define un morfismo

$$\varphi : C_k(M) \to C_k(M')$$

por la fórmula $\varphi(m)\langle i_0 \dots i_q\rangle = \varphi(m\langle i_0 \dots i_q\rangle)$, dando por paso al límite un morfismo $\varphi : C(M) \to C(M')$; además estos morfismos conmutan con el coborde, y definen morfismos en cohomología

$$\varphi : H_k^q(M) \to H_k^q(M') \quad \text{y} \quad \varphi : H^q(M) \to H^q(M').$$

Si se tiene una sucesión exacta $0 \to M \to M' \to M'' \to 0$, se tiene una sucesión exacta de complejos $0 \to C_k(M) \to C_k(M') \to C_k(M'') \to 0$, dando una sucesión exacta de cohomología:

$$\cdots \to H_k^q(M') \to H_k^q(M'') \to H_k^{q+1}(M) \to H_k^{q+1}(M') \to \dots$$

Mismos resultados para $C(M)$ y los $H^q(M)$.

OBSERVACIÓN. Veremos más adelante (en el nº 69) que se pueden expresar los $H_k^q(M)$ a través de los Ext_S^q.

62. Cálculo de $H_k^q(M)$ para ciertos módulos M. Sean M un S-módulo graduado y $m \in M$ un elemento homogéneo de grado 0. El sistema de los $(t_i^k \cdot m)$ es un 0-cociclo de $C_k(M)$, que denotaremos $\alpha^k(M)$, y que identificaremos con su clase de cohomología. Se obtiene así un morfismo K-lineal $\alpha^k : M_0 \to H_k^0(M)$; como $\alpha^h = \rho_k^h \circ \alpha^k$ si $h \geq k$, los α^k definen por paso al límite un morfismo $\alpha : M_0 \to H^0(M)$.

Introducimos ahora dos notaciones:

Si $(P_0, \dots, P_h)$ son elementos de S, denotaremos $(P_0, \dots, P_h)M$ el submódulo de M formado por los elementos $\sum_{i=0}^{i=h} P_i \cdot m_i$, con $m_i \in M$; si los P_i son homogéneos, este submódulo es homogéneo.

Si P es un elemento de S y N es un submódulo de M, denotaremos $N : P$ el submódulo de M formado por los elemntos $m \in M$ tales que $P \cdot m \in N$; se tiene evidentemente $N : P \supset N$; si N y P son homogéneos, $N : P$ es homogéneo.

Una vez precisadas estas notaciones, se tiene:

PROPOSICIÓN 73. *Sean M un S-módulo graduado y k un entero ≥ 0. Supongamos que, para todo $i \in I$, se tiene:*

$$(t_0, \dots t_{i-1}^k)M : t_i^k = (t_0^k, \dots, t_{i-1}^k)M.$$

Entonces:

(a) $\alpha^k : M_0 \to H_k^0(M)$ *es biyectivo (si $r \geq 1$.)*
(b) $H_k^q(M) = 0$ *para* $0 < q < r$.

(Para $i = 0$, la hipótesis significa que $t_0^k \cdot m = 0$ implica $m = 0$).

Esta Proposición es un caso particular de un resultado debido a de Rham [**11**] (el resultado de de Rham es además válido aunque no se supongan homogéneos los $m\langle i_0 \dots i_q\rangle$). Véase también [**6**], Cap. VIII, §4, donde se trata un caso particular suficiente para las aplicaciones que vamos a hacer.

Vamos a aplicar la Proposición 73 al S-módulo graduado $S(n)$:

PROPOSICIÓN 74. *Sean k un entero ≥ 0, n un entero cualquiera. Entonces:*

(a) $\alpha^k : S_n \to H_k^0(S(n))$ *es biyectivo (si $r \geq 1$.)*
(b) $H_k^q(S(n)) = 0$ *para* $0 < q < r$.
(c) $H_k^r(S(n))$ *admite como base (sobre K) las clases de cohomología de los monomios $t_0^{\alpha_0} \dots t_r^{\alpha_r}$, con $0 \leq \alpha_i < k$ y $\sum_{i=0}^{i=r} \alpha_i = k(r+1) + n$.*

Es claro que el S-módulo $S(n)$ verifica las hipótesis de la Proposición 73, lo que demuestra (a) y (b). Por otro lado, para todo S-módulo graduado M, se tiene $H^r_k(M) = M_{k(r+1)}/(t_0^k, \ldots, t_r^k)M_{kr}$; ahora bien, los monomios

$$t_0^{\alpha_0} \ldots t_r^{\alpha_r}, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=0}^{i=r} \alpha_i = k(r+1) + n$$

forman una base de $S(n)_{k(r+1)}$, y aquellos para los que alguno de los α_i sea $\geq k$ forman una base de $(t_0^k, \ldots, t_r^k)S(n)_{kr}$; dando (c).

Es cómodo escribir los exponentes α_i de la forma $\alpha_i = k - \beta_i$. Las condiciones enunciadas en (c) se escriben entonces:

$$0 < \beta_i \leq k \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{i=r} \beta_i = -n.$$

La segunda condición, junto con $\beta_i > 0$, implica que $\beta_i \leq -n-r$; luego si $k \geq -n-r$, la condición $\beta_i \leq k$ es consecuencia de las dos anteriores. De ahí que:

Corolario. *Para $k \geq -n-r$, $H^r_k(S(n))$ admite como base las clases de cohomología de monomios $(t_0 \ldots t_r)^k/t_0^{\beta_0} \ldots t_r^{\beta_r}$, con $\beta_i > 0$ y $\sum_{i=0}^{i=r} \beta_i = -n$.*

Se tiene igualmente:

Corolario. *Si $h \geq k \geq -n-r$, el morfismo*

$$\rho_k^h : H^q_k(S(n)) \to H^q_h(S(n))$$

es biyectivo para todo $q \geq 0$.

Para $q \neq r$, esto resulta de las afirmaciones (a) y (b) de la Proposición 74. Para $q = r$, resulta del primer Corolario, teniendo en cuenta que ρ_k^h transforma

$$(t_0 \ldots t_r)^k/t_0^{\beta_0} \ldots t_r^{\beta_r} \quad \text{en} \quad (t_0 \ldots t_r)^h/t_0^{\beta_0} \ldots t_r^{\beta_r}$$

Corolario. *El morfismo $\alpha : S_n \to H^0(S(n))$ es biyectivo si $r \geq 1$, o si $n \geq 0$. Se tiene $H^q(S(n)) = 0$ para $0 < q < r$, y $H^r(S(n))$ es un espacio vectorial de dimensión $\binom{-n-1}{r}$ sobre K.*

La afirmación relativa a α resulta de la Proposición 74, (a), en el caso donde $r \geq 1$; es inmediata si $r = 0$ y $n \geq 0$. El resto del Corolario es una consecuencia evidente de los Corolarios anteriores (entendiendo que el coeficiente binomial $\binom{a}{r}$ es nulo si $a < r$).

63. Propiedades generales de los $H^q(M)$.

Proposición 75. *Sea M un S-módulo graduado verificando la condición* (TF). *Entonces:*

(a) *Existe un entero* $k(M)$ *tal que* $\rho_k^h : H_k^q(M) \to H_h^q(M)$ *es biyectivo para* $h \geq k \geq k(M)$ *y cualquier* q.
(b) $H^q(M)$ *es un espacio vectorial de dimensión finita sobre* K *para todo* $q \geq 0$.
(c) *Existe un entero* $n(M)$ *tal que, para* $n \geq n(M)$, $\alpha : M_n \to H^0(M(n))$ *es biyectivo, y* $H^q(M(n))$ *es nulo para todo* $q > 0$.

Se reduce enseguida al caso de S-módulos graduados libres finitamente generados. Diremos entonces que M es de *dimensión* $\leq s$ (siendo s entero ≥ 0) si existe una sucesión exacta:

$$0 \to L^s \to L^{s-1} \to \cdots \to L^0 \to M \to 0$$

donde los L^i son S-módulos graduados libres de tipo finito. Por el teorema de las sizigias de Hilbert (ver [**6**], Cap. VIII, th. 6.5), esta dimensión es siempre $\leq r+1$.

Demostraremos la Proposición por recurrencia sobre la dimensión de M. Si es 0, M es libre finitamente generado, es decir suma directa de módulos $S(n_i)$, y la Proposición resulta del segundo y tercer Corolario a la Proposición 74. Supongamos que M es de dimensión $\leq s$, y sea N el núcleo de $L^0 \to M$. El S-módulo graduado N es de dimensión $\leq s-1$, y se tiene una sucesión exacta:

$$0 \to N \to L^0 \to M \to 0.$$

Viendo la hipótesis de recurrencia, la Proposición es cierta para N y L^0. Aplicando el lema de los cinco ([**7**], Cap. I, Lema 4.3) al diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_k^q(N) & \longrightarrow & H_k^q(L^0) & \longrightarrow & H_k^q(M) & \longrightarrow & H_k^{q+1}(N) & \longrightarrow & H_k^{q+1}(L^0) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H_h^q(N) & \longrightarrow & H_h^q(L^0) & \longrightarrow & H_h^q(M) & \longrightarrow & H_h^{q+1}(N) & \longrightarrow & H_h^{q+1}(L^0),
\end{array}$$

donde $h \geq k \geq \sup(k(N), k(L^0))$, se demuestra (a), luego evidentemente (b), porque los $H_k^q(M)$ son de dimensión finita sobre K. Por otro lado, la sucesión exacta

$$H^q(L^0(n)) \to H^q(M(n)) \to H^{q+1}(N(n))$$

muestra que $H^q(M(n)) = 0$ para $n \geq \sup(n(L^0), n(N))$. Consideremos finalmente el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N_n & \longrightarrow & L_n & \longrightarrow & M_n & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & H^0(N(n)) & \longrightarrow & H^0(L^0(n)) & \longrightarrow & H^0(M(N)) & \longrightarrow & H^1(N(n));
\end{array}$$

para $n \geq n(N)$, se tiene $H^1(N(n)) = 0$; se deduce que $\alpha : M_n \to H^0(M(n))$ es biyectivo para $n \geq \sup(n(L^0), n(N))$, lo que concluye la demostración.

64. Comparación de los grupos $H^q(M)$ y $H^q(X, \mathcal{A}(M))$. Sea M un S-módulo graduado, y sea $\mathcal{A}(M)$ el haz algebraico sobre $X = \mathbb{P}_r(K)$ definido a partir de M por el procedimiento del nº 57. Vamos a comparar $C(M)$ con $C'(\mathfrak{U}, \mathcal{A}(M))$, el complejo de cocadenas alternadas del recubrimiento $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ con coeficientes en valores en el haz $\mathcal{A}(M)$.

Sea $m \in C_k^q(M)$, y sea $(i_0, \ldots, i_q)$ una sucesión de $q+1$ elementos de I. El polinomio $(t_{i_0 \ldots t_{i_q}})^k$ pertenece visiblemente a $S(U_{i_0\ldots i_q})$, con las notaciones del nº 57. Resulta que $m\langle i_0 \ldots i_q\rangle/(t_{i_0} \ldots t_{i_q})^k$ pertenece a M_U, donde $U = U_{i_0\ldots i_q}$, luego define una sección de $\mathcal{A}(M)$ a lo largo de $U_{i_0\ldots i_q}$. Cuando $(i_0, \ldots, i_q)$ varía, el sistema formado por estas secciones es una q-cocadena alternada de $\mathfrak{U}$, con valores en $\mathcal{A}(M)$, que denotaremos $\iota_k(m)$. Se ve enseguida que ι_k conmuta con d, y que $\iota_k = \iota_h \circ \rho_k^h$ si $h \geq k$. Por paso al límite inductivo, los ι_k definen entonces un morfismo $\iota : C(M) \to C'(\mathfrak{U}, \mathcal{A}(M))$, que conmuta con d.

Proposición 76. *Si M verifica la condición* (TF), *$\iota : C(M) \to C'(\mathfrak{U}, \mathcal{A}(M))$ es biyectivo.*

Si $M \in \mathcal{C}$, se tiene $M_n = 0$ para $n \geq n_0$, dando que $C_k(M) = 0$ para $k \geq n_0$, y $C(M) = 0$. Como todo S-módulo verificando (TF) es $\mathcal{C}$-isomorfo a un módulo finitamente generado, ello muestra que nos podemos restringir al caso en que M es finitamente generado. Se puede entonces encontrar una sucesión exacta $L^1 \to L^0 \to M \to 0$, donde L^1 y L^0 son libres finitamente generados. Por las Proposiciónes 66 y 68 del nº 58, la sucesión

$$\mathcal{A}(L^1) \to \mathcal{A}(L^0) \to \mathcal{A}(M) \to 0$$

es una sucesión exacta de haces algebraicos coherentes; como los $U_{i_0\ldots i_q}$ son abiertos afines, la sucesión

$$C'(\mathfrak{U}, \mathcal{A}(L^1)) \to C'(\mathfrak{U}, \mathcal{A}(L^0)) \to C'(\mathfrak{U}, \mathcal{A}(M)) \to 0$$

es una sucesión exacta (ver nº 45, segundo Corolario al Teorema 6). El diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
C(L^1) \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & C(L^0) \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & C(M) \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & 0 \arrow[d] \\
C'(\mathfrak{U}, \mathcal{A}(L^1)) \arrow[r] & C'(\mathfrak{U}, \mathcal{A}(L^0)) \arrow[r] & C'(\mathfrak{U}, \mathcal{A}(M)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

muestra entonces que, si la Proposición es cierta para los módulos L^1 y L^0, es cierta para M. Nos podemos restringir entonces al caso particular de un módulo libre finitamente generado, luego, por descomposición en suma directa, al caso $M = S(n)$.

En este caso, se tiene $\mathcal{A}(S(n)) = \mathcal{O}(n)$; una sección $f_{i_0\ldots i_q}$ de $\mathcal{O}(n)$ sobre $U_{i_0\ldots i_q}$ es, por la definición de este haz, una función regular sobre $V_{i_0} \cap \cdots \cap V_{i_q}$ y homogénea de grado n. Como $V_{i_0} \cap \cdots \cap V_{i_q}$ es el conjunto de puntos de K^{r+1} donde la función $t_{i_0} \ldots t_{i_q}$ es $\neq 0$, existe un entero k tal que

$$f_{i_0\ldots i_q} = P\langle i_0 \ldots i_q\rangle/(t_{i_0} \ldots t_{i_q})^k,$$

siendo $P\langle i_0 \dots i_q\rangle$ un polinomio homogéneo de grado $n + k(q + 1)$, es decir de grado $k(q + 1)$ en $S(n)$. Así pues, toda cocadena alternada $f \in C'(\mathfrak{U}, \mathcal{O}(n))$ define un sistema $P\langle i_0 \dots i_q\rangle$ que es un elemento de $C_k(S(n))$; dando un morfismo

$$\nu : C'(\mathfrak{U}, \mathcal{O}(n)) \to C(S(n)).$$

Como se verifica enseguida que $\iota \circ \nu = 1$ y $\nu \circ \iota = 1$, resulta que ι es biyectivo, lo que concluye la demostración.

Corolario. *ι define un isomorfismo de $H^q(M)$ sobre $H^q(\mathcal{A}(M))$ para todo $q \geq 0$.*

En efecto, se sabe que $H'^q(\mathfrak{U}, \mathcal{A}(M)) = H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{A}(M))$ (n$^{\underline{o}}$ 20, Proposición 21), y que $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{A}(M)) = H^q(X, \mathcal{A}(M))$ (n$^{\underline{o}}$ 52, Proposición 60, que es aplicable porque $\mathcal{A}(M)$ es coherente).

Observación. Es fácil ver que $\iota : C(M) \to C'(\mathfrak{U}, \mathcal{A}(M))$ es *inyectivo* aunque M no verifique la condición (TF).

65. Aplicaciones

Proposición 77. *Si M es un S-módulo graduado verificando la condición* (TF)*, el morfismo $\alpha : M \to \Gamma(\mathcal{A}(M))$, definido en el n$^{\underline{o}}$ 59, es $\mathcal{C}$-biyectivo.*

Veamos que $\alpha : M \to M_n \to \Gamma(X, \mathcal{A}(M(n)))$ es biyectivo para n lo bastante grande. Por la Proposición 76, $\Gamma(X, \mathcal{A}(M(n)))$ se identifica con $H^0(M(n))$; la Proposición resulta entonces de la Proposición 75, (c), teniendo en cuenta que el morfismo α se convierte por la identificación anterior en el morfismo definido al principio del n$^{\underline{o}}$ 62, igualmente denotado α.

Proposición 78. *Sea $\mathcal{F}$ un haz algebraico coherente sobre X. El S-módulo graduado $\Gamma(\mathcal{F})$ verifica la condición* (TF)*, y el morfismo $\beta : \mathcal{A}(\Gamma(\mathcal{F})) \to \mathcal{F}$, definido en el n$^{\underline{o}}$ 59, es biyectivo.*

Por el Teorema 12 del n$^{\underline{o}}$ 60, se puede suponer que $\mathcal{F} = \mathcal{A}(M)$, donde M es un módulo verificando (TF). Por la Proposición anterior, $\alpha : M \to \Gamma(\mathcal{A}(M))$ es $\mathcal{C}$-biyectivo; como M verifica (TF), se sigue que $\Gamma(\mathcal{A}(M))$ también la verifica. Aplicando la Proposición 69 del n$^{\underline{o}}$ 58, se ve que $\alpha : \mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(\Gamma(\mathcal{A}(M)))$ es biyectivo. Como la composición: $\mathcal{A}(M) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{A}(\Gamma(\mathcal{A}(M))) \xrightarrow{\beta} \mathcal{A}(M)$ es la identidad (n$^{\underline{o}}$ 59, Proposición 70), se sigue que β es biyectivo.

Proposición 79. *Sea $\mathcal{F}$ un haz algebraico coherente sobre X. Los grupos $H^q(X, \mathcal{F})$ son espacios vectoriales de dimensión finita sobre K para todo $q \geq 0$, y se tiene que $H^q(X, \mathcal{F}(n)) = 0$ para $q > 0$ lo bastante grande.*

Se puede suponer, como antes, que $\mathcal{F} = \mathcal{A}(M)$, donde M es un módulo verificando (TF). La Proposición resulta entonces de la Proposición 75 y del Corolario a la Proposición 76.

Proposición 80. *Se tiene que* $H^q(X, \mathcal{O}(n)) = 0$ *para* $0q < r$, *y* $H^r(X, \mathcal{O}(n))$ *es un espacio vectorial de dimensión* $\binom{-n-1}{r}$ *sobre* K, *admitiendo como base las clases de cohomología de los cociclos alternados de* $\mathfrak{U}$

$$f_{01\ldots r} = 1/t_0^{\beta_0} \ldots t_r^{\beta_r}, \quad \text{con} \quad \beta_i > 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{i=r} \beta_i = -n.$$

Se tiene $\mathcal{O}(n) = \mathcal{A}(S(n))$, dando que $H^q(X, \mathcal{O}(n)) = H^q(S(n))$, por el Corolario a la Proposición 76; la Proposición resulta inmediatamente de ello y de los corolarios a la Proposición 74.

Se denotará en particular que $H^r(X, \mathcal{O}(-r-1))$ es un espacio vectorial de dimensión 1 sobre K, admitiendo como base la clase de cohomología del cociclo $f_{01\ldots r} = 1/t_0 \ldots t_r$.

66. Haces algebraicos coherentes sobre variedades proyectivas . Sea V una subvariedad cerrada del espacio proyectivo $X = \mathbb{P}_r(K)$, y sea $\mathcal{F}$ un haz algebraico coherente sobre V. Prolongando $\mathcal{F}$ por 0 fuera de V, se obtiene un haz algebraico coherente sobre X (ver nº 39), denotado $\mathcal{F}^X$; se sabe que $H^q(X, \mathcal{F}^X) = H^q(V, \mathcal{F})$. Los resultados del nº anterior se aplican entonces a los grupos $H^q(V, \mathcal{F})$. Se obtiene primeramente (teniendo en cuenta el nº 52):

Teorema 13. *Los grupos* $H^q(V, \mathcal{F})$ *son espacios vectoriales finitos sobre* K, *nulos para* $q > \dim V$.

En particular, para $q = 0$, se tiene:

Corolario. $\Gamma(V, \mathcal{F})$ *es un espacio vectorial de dimensión finita sobre* K.

(Es natural conjeturar que el teorema de arriba es válido para toda variedad *completa*, en el sentido de Weil [**16**]).

Sea $U_i' = U_i \cap V$; los U_i' forman un recubrimiento abierto $\mathfrak{U}'$ de V. Si $\mathcal{F}$ es un haz algebraico sobre V, sea $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}(U_i')$ y sea $\theta_{ij}(n)$ el isomorfismo de $\mathcal{F}_j(U_i' \cap U_j')$ en $\mathcal{F}_i(U_i' \cap U_j')$ definido por la multiplicación por $(t_j/t_i)^n$. Se denotará $\mathcal{F}(n)$ al haz obtenido a partir de los $\mathcal{F}_i$ pegándolos a través de los $\theta_{ij}(n)$. La operación $\mathcal{F}(n)$ tiene las mismas propiedades que la definida en el nº 54, a la que generaliza; en particular $\mathcal{F}(n)$ es canónicamente isomorfo a $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_V(n)$.

Se tiene $\mathcal{F}^X(n) = \mathcal{F}(n)^X$. Aplicando entonces el Teorema 11 del nº 55, así como la Proposición 79 del nº 65, se obtiene:

Teorema 14. *Sea* $\mathcal{F}$ *un haz algebraico coherente sobre* V. *Existe un entero* $m(\mathcal{F})$ *tal que se tiene, para todo* $n \geq m(\mathcal{F})$:

(a) *Para todo* $x \in V$, *el* $\mathcal{O}_{x,V}$*-módulo* $\mathcal{F}(n)_x$ *está generado por los elementos de* $\Gamma(V, \mathcal{F}(n))$.
(b) $H^q(V, \mathcal{F}(n)) = 0$ *para todo* $q > 0$.

Observación. Es esencial observar que el haz $\mathcal{F}(n)$ *no depende solo de* $\mathcal{F}$ *y de* n, sino también de la *inmersión* de V en el espacio proyectivo X. Más precisamente, sea P

el fibrado principal $\pi^{-1}(V)$, de grupo estructural el grupo K^*; si n es un entero, hacemos operar K^* sobre K por la fórmula:

$$(\lambda, \mu) \to \lambda^{-n}\mu \quad \text{si} \quad \lambda \in K^* \quad \text{y} \quad \mu \in K.$$

Sea $E^n = P \times_{K^*} K$ el fibrado asociado a P con fibra típica K, dotado de las operaciones anteriores; sea $\mathcal{S}(E^n)$ el haz de gérmenes de secciones de E^n (ver nº 41). Teniendo en cuenta que los t_i/t_j forman un sistema de cambio de cartas para P, se verifica enseguida que $\mathcal{S}(E^n)$ es canónicamente isomorfo a $\mathcal{O}_V(n)$. La fórmula $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_V(n) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{S}(E^n)$ muestra entonces que la operación $\mathcal{F} \to \mathcal{F}(n)$ solo depende *de la clase del fibrado P definido por la inmersión $V \to X$*. En particular, si V es normal, $\mathcal{F}(n)$ solo depende de la clase de equivalencia lineal de las secciones hiperplanas de V en la inmersión considerada (ver [**17**]).

67. Un complemento. Si M es un S-módulo graduado verificando (TF), denotaremos $M^\natural$ el S-módulo graduado $\Gamma(\mathcal{A}(M))$. Hemos visto en el nº 65 que $\alpha : M \to M^\natural$ es $\mathcal{C}$-biyectivo. Vamos a dar condiciones que permitan afirmar que α es biyectivo.

Proposición 81. *Para que $\alpha : M \to M^\natural$ sea biyectivo, es necesario y suficiente que se verifiquen las siguientes condiciones:*

(i) *Si $m \in M$ es tal que $t_i \cdot m = 0$ para todo $i \in I$, entonces $m = 0$.*
(ii) *Si varios elementos $m_i \in M$, homogéneos del mismo grado, verifican la relación $t_j \cdot m_i - t_i \cdot m_j = 0$ para toda pareja (i, j), existe $m \in M$ tal que $m_i = t_i \cdot m$.*

Mostraremos que $M^\natural$ verifica las condiciones (i) y (ii), lo que probará la necesidad. Para (i), se puede suponer que m es homogéneo, es decir que es una sección de $\mathcal{A}(M(n))$; en este caso, la condición $t_i \cdot m = 0$ implica que m es nulo sobre U_i, y como esto ocurre para todo $i \in I$, se tiene entonces que $m = 0$. Para (ii), sea n el grado de los m_i; se tiene entonces $m_i \in \Gamma(\mathcal{A}(M(n)))$; como $1/t_i$ es una sección de $\mathcal{O}(-1)$ sobre U_i, m_i/t_i es una sección de $\mathcal{A}(M(n-1))$ sobre U_i, y la condición $t_j \cdot m_i - t_i \cdot m_j = 0$ muestra que estas secciones son las restricciones de una sección única m de $\mathcal{A}(M(n-1))$ sobre X; queda comparar las secciones $t_i \cdot m$ con m_i; para mostrar que coinciden sobre U_j, basta notar que $t_j(t_i \cdot m - m_i) = 0$ sobre U_j, lo que resulta de la fórmula $t_j \cdot m_i = t_i \cdot m_j$ y de la definición de m.

Veamos ahora que (i) implica que α es inyectivo. Para n lo bastante grande, se sabe que $\alpha : M_n \to M_n^\natural$ es biyectivo, y se puede entonces razonar por recurrencia descendente sobre n; si $\alpha(m) = 0$, con $m \in M_n$, tendremos que $t_i\alpha(m) = \alpha(t_i \cdot m) = 0$, y la hipótesis de recurrencia, aplicable porque $t_i \cdot m \in M_{n+1}$, muestra que $m = 0$. Veamos finalmente que (i) y (ii) implican que α es biyectivo. Se puede razonar, igual que antes, por recurrencia descendente sobre n. Si $m' \in M_n^\natural$, la hipótesis de recurrencia muestra que existen $m_i \in M_{n+1}$ tales tales que $\alpha(m_i) = t_i \cdot m'$; se tiene que $\alpha(t_j \cdot m_i - t_i \cdot m_j) = 0$, dando que $t_j \cdot m_i - t_i \cdot m_j = 0$, porque α es inyectivo. La condición (ii) implica entonces la existencia de $m \in M_n$ tal que $t_i \cdot m = m_i$; se tiene que $t_i(m' - \alpha(m)) = 0$, lo que muestra que $m' = \alpha(m)$, y concluye la demostración.

Observaciones. (1) La demostración muestra que la condición (i) es necesaria y suficiente para que α sea inyectivo.

(2) Podemos expresar (i) y (ii) así: el morfismo $\alpha^1 : M_n \to H^0_1(M(n))$ es biyectivo para todo $n \in \mathbb{Z}$. Además, la Proposición 76 muestra que se puede identificar $M^\natural$ con el S-módulo $\sum_{n\in\mathbb{Z}} H^0(M(n))$, y sería fácil obtener de ello una demostración puramente algebraica de la Proposición 81 (sin utilizar el haz $\mathcal{A}(M)$).

§4. Relación con los funtores Ext^q_S

68. Los funtores Ext^q_S. Conservamos las notaciones del nº 56. Si M y N son S-módulos graduados, denotaremos por $\mathrm{Hom}_S(M,N)_n$ el grupo de los S-morfismos homogéneos de grado n de M en N, y por $\mathrm{Hom}_S(M,N)$ el grupo abeliano graduado $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_S(M,N)_n$; es un S-módulo graduado; cuando M es finitamente generado coincide con el S-módulo de todos los S-morfismos de M en N.

Los funtores derivados (ver [**6**], Cap. V) del funtor $\mathrm{Hom}_S(M,N)$ son los funtores $\mathrm{Ext}^q_S(M,N)$, $q = 0, 1, \ldots$. Recordamos brevemente su definición:[9]

Se escoge una "resolución" de M, es decir una sucesión exacta:

$$\cdots \to L^{q+1} \to L^q \to \cdots \to L^0 \to M \to 0,$$

donde los L^q son S-módulos graduados libres, y las aplicaciones son morfismos (es decir, como de costumbre, S-morfismos homogéneos de grado 0). Si definimos $C^q = \mathrm{Hom}_S(L^q, N)$, el morfismo $L^{q+1} \to L^q$ define por trasposición un morfismo $C^q \to C^{q+1}$, verificando $d \circ d = 0$; así pues $C = \sum_{q\geq 0} C^q$ está dotado de una estructura de complejo, y el q-ésimo grupo de cohomología de C por definición no es otro que $\mathrm{Ext}^q_S(M,N)$; se prueba que no dependen de la resolución escogida. Como los C^q son S-módulos graduados y $d : C^q \to C^{q+1}$ es homogéneo de grado 0, los $\mathrm{Ext}^q_S(M,N)$ son S-módulos graduados por los subespacios $\mathrm{Ext}^q_S(M,N)_n$; los $\mathrm{Ext}^q_S(M,N)_n$ son los grupos de cohomología del complejo formado por los $\mathrm{Hom}_S(L^q,N)_n$, es decir son los funtores derivados del funtor $\mathrm{Hom}_S(M,N)_n$.

Recordamos las propiedades básicas de Ext^q_S :

$\mathrm{Ext}^0_S(M,N) = \mathrm{Hom}_S(M,N)$; $\mathrm{Ext}^q_S(M,N) = 0$ para $q > r+1$ si M es finitamente generado (por el teorema de las sizigias de Hilbert, ver [**6**], Cap. VIII, th. 6.5); $\mathrm{Ext}^q_S(M,N)$ es un S-módulo finitamente generado cuando lo sean M y N (porque se puede escoger una resolución donde los L^q sean finitamente generados); para todo $n \in \mathbb{Z}$, se tienen isomorfismos canónicos:

$$\mathrm{Ext}^q_S(M(n),N)) \cong \mathrm{Ext}^q_S(M,N(-n)) \cong \mathrm{Ext}^q_S(M,N)(-n).$$

Las sucesiones exactas:

$$0 \to N \to N' \to N'' \to 0 \quad \text{y} \quad 0 \to M \to M' \to M'' \to 0$$

[9]Cuando M no es un módulo finitamente generado, los $\mathrm{Ext}^q_S(M,N)$ definidos arriba pueden diferir de los $\mathrm{Ext}^q_S(M,N)$ definidos en [**6**]: esto es así porque $\mathrm{Hom}_S(M,N)$ no tiene el mismo sentido en ambos casos. Sin embargo, todas las demostraciones de [**6**] son válidas sin modificación en el caso considerado aquí: esto se ve ya sea directamente o aplicando el Apéndice de [**6**].

dan lugar a sucesiones exactas:

$$\cdots \to \mathrm{Ext}_S^q(M,N) \to \mathrm{Ext}_S^q(M,N') \to \mathrm{Ext}_S^q(M,N'') \to \mathrm{Ext}_S^{q+1}(M,N) \to \ldots$$
$$\cdots \to \mathrm{Ext}_S^q(M'',N) \to \mathrm{Ext}_S^q(M',N) \to \mathrm{Ext}_S^q(M,N) \to \mathrm{Ext}_S^{q+1}(M'',N) \to \ldots$$

69. Interpretación de los $H_k^q(M)$ en términos de los Ext_S^q. Sea M un S-módulo graduado y sea k un entero ≥ 0. Pongamos:

$$B_k^q(M) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} H_k^q(M(n)),$$

con las notaciones del nº 61.

Se obtiene así un grupo graduado, isomorfo al q-ésimo grupo de cohomología del complejo $\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_k(M(n))$; este complejo puede ser dotado de una estructura de S-módulo compatible con la graduación al poner

$$(P\cdot m)\langle i_0 \ldots i_q\rangle = P\cdot m\langle i_0\ldots i_q\rangle, \quad \text{si} \quad P\in S_p \quad \text{y} \quad m\langle i_0\ldots i_q\rangle \in C_k^q(M(n));$$

como el operador coborde es un S-morfismo homogéneo de grado 0, se sigue que los $B_k^q(M)$ son ellos mismos S-módulos graduados.

Pondremos

$$B^q(M) = \lim_{k\to\infty} B_k^q(M) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} H^q(M(n)).$$

Los $B^q(M)$ son S-módulos graduados. Para $q=0$, se tiene

$$B^0(M) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} H^0(M(n)),$$

y se recupera el módulo denotado $M^\natural$ en el nº 67 (cuando M verifica la condición (TF)). Para cada $n\in\mathbb{Z}$, se ha definido en el nº 62 una aplicación lineal $\alpha : M_n \to H^0(M(n))$; se verifica inmediatamente que la suma de estas aplicaciones define un morfismo, que denotaremos α, de M en $B^0(M)$.

PROPOSICIÓN 82. *Sea k un entero ≥ 0, y sea J_k el ideal $(t_0^k,\ldots t_r^k)$ de S. Para todo S-módulo graduado M, los S-módulos graduados $B_k^q(M)$ y $\mathrm{Ext}_S^q(J_k,M)$ son isomorfos.*

Sea L_k^q, $q=0,\ldots,r$, el S-módulo graduado libre que admite como base los elementos $e\langle i_0\ldots i_q\rangle$, $0\leq i_0 < i_1 < \ldots < i_q \leq r$, de grado $k(q+1)$; se define un operador $d : L_k^{q+1} \to L_k^q$ y un operador $\varepsilon : L_k^0 \to J_k$ por las fórmulas:

$$d(e\langle i_0\ldots i_q\rangle) = \sum_{j=0}^{j=q+1} t_{i_j}^k \cdot e\langle i_0 \ldots \hat{i}_j \ldots i_{q+1}\rangle,$$

$$\varepsilon(e\langle i\rangle) = t_i^k.$$

Lema 16. *La sucesión de morfismos:*

$$0 \to L_k^r \xrightarrow{d} L_k^{r-1} \to \cdots \to L_k^0 \xrightarrow{\varepsilon} J_k \to 0$$

es una sucesión exacta.

Para $k = 1$, el resultado es bien conocido (ver [**6**], Cap. VIII, §4); el caso general se demuestra de la misma manera (o se reduce a este): se puede igualmente utilizar el teorema demostrado en [**11**].

La Proposición 82 se deduce inmediatamente del Lema 16, al observar que el complejo formado por los $\mathrm{Hom}_S(L_k^q, M)$ y el traspuesto de d no es otro que el complejo $\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_k(M(n))$.

Corolario. *$H_k^q(M)$ es isomorfo a $\mathrm{Ext}_S^q(J_k, M)_0$.*

En efecto, estos grupos son las componentes de grado 0 de los grupos graduados $B_k^q(M)$ y $\mathrm{Ext}_S^q(J_k, M)$.

Corolario. *$H^q(M)$ es isomorfo a $\mathrm{lím}_{k\to\infty} \mathrm{Ext}_S^q(J_k, M)_0$.*

Se ve fácilmente que el morfismo $\rho_k^h : H_k^q(M) \to H_h^q(M)$ del nº 61 se convierte por el isomorfismo del primer Corolario en el morfismo

$$\mathrm{Ext}_S^q(J_k, M)_0 \to \mathrm{Ext}_S^q(J_h, M)_0$$

definido por la inclusión $J_h \to J_k$; lo que prueba este Corolario.

Observación. Sea M un S-módulo graduado finitamente generado; M define (ver nº 48) un haz algebraico coherente $\mathcal{F}'$ sobre K^{r+1}, luego sobre $Y = K^{r+1} - \{0\}$, y se puede verificar que $H^q(Y, \mathcal{F}')$ es isomorfo a $B^q(M)$.

70. Definición de los funtores $T^q(M)$. Definamos primero la noción de módulo *dual* de un S-módulo graduado. Sea M un S-módulo graduado; para todo $n \in \mathbb{Z}$, M_n es un espacio vectorial sobre K, luego designaremos el espacio vectorial dual por $(M_n)'$. Pongamos:

$$M^* = \sum_{n\in\mathbb{Z}} M_n^*, \quad \text{con} \quad M_n^* = (M_{-n})'.$$

Vamos a dotar a M^* de una estructura de S-módulo compatible con esa graduación; para todo $P \in S_p$, la aplicación $m \to P \cdot m$ es una aplicación K-lineal de M_{-n-p} en M_{-n}, luego define por trasposición una aplicación K-lineal de $(M_{-n})' = M_n^*$ en $(M_{-n-p})' = M_{n+p}^*$; esto define la estructura de S-módulo de M^*. Se habría podido definir igualmente M^* como $\mathrm{Hom}_S(M, K)$, designando por K el S-módulo graduado $S/(t_0, \ldots, t_r)$. El S-módulo graduado M^* se llama el *dual* de M; se tiene $M^{**} = M$ si cada uno de los M_n es de dimensión finita sobre K, lo cual sucede cuando $M = \Gamma(\mathcal{F})$, siendo $\mathcal{F}$ un haz algebraico coherente sobre X, o bien si M es finitamente generado. Todo morfismo

$\varphi : M \to N$ define por trasposición un morfismo de N^* en M^*. Si la sucesión $M \to N \to P$ es exacta, la sucesión $P^* \to N^* \to M^*$ también lo es; dicho de otra forma, M^* es un funtor *contravariante* y *exacto* del módulo M. Cuando I es un ideal homogéneo de S, el dual de S/I no es otro que el "sistema inverso" de I, en el sentido de Macaulay (ver [**9**], n$^{\text{o}}$ 25).

Sean ahora M un S-módulo graduado y q un entero ≥ 0. Hemos definido en el n$^{\text{o}}$ anterior el S-módulo graduado $B^q(M)$; el *módulo dual* de $B^q(M)$ será denotado $T^q(M)$. Se tiene entonces, por definición:

$$T^q(M) = \sum_{n \in Z} T^q(M)_n, \quad \text{con} \quad T^q(M)_n = (H^q(M(-n)))'.$$

Todo morfismo $\varphi : M \to N$ define un morfismo de $B^q(M)$ en $B^q(N)$, dando un morfismo de $T^q(N)$ en $T^q(M)$; así pues los $T^q(M)$ son funtores *contravariantes* de M (veremos además en el n$^{\text{o}}$ 72 que se pueden expresar muy sencillamente en función de los Ext_S). Toda sucesión exacta:

$$0 \to M \to N \to P \to 0$$

da lugar a una sucesión exacta:

$$\cdots \to B^q(M) \to B^q(N) \to B^q(P) \to B^{q+1}(M) \to \ldots$$

dando, por trasposición, una sucesión exacta:

$$\cdots \to T^{q+1}(M) \to T^q(P) \to T^q(N) \to T^q(M) \to \ldots$$

El morfismo $\alpha : M \to B^0(M)$ define por trasposición un morfismo $\alpha^* : T^0(M) \to M^*$.

Como $B^q(M) = 0$ para $q > r$, se tiene $T^q(M) = 0$ para $q > r$.

71. Determinación de $T^r(M)$. (En este n$^{\text{o}}$, así como en el siguiente, supondremos que se tiene $r \geq 1$; el caso $r = 0$ conduce a enunciados un poco diferentes, y además triviales).

Denotaremos por Ω el S-módulo graduado $S(-r-1)$; es un módulo libre que admite como base un elemento de grado $r+1$. Hemos visto en el n$^{\text{o}}$ 62 que $H^r(\Omega) = H^r_k(\Omega)$ para k lo bastante grande, y que $H^r_k(\Omega)$ admite una base sobre K formada por el único elemento $(t_0 \ldots t_r)^k / t_0 \ldots t_r$; la imagen en $H^r(\Omega)$ de este elemento será denotada ξ; ξ constituye entonces una base de $H^r(\Omega)$.

Vamos ahora a definir un producto escalar $\langle h, \varphi \rangle$ entre elementos $h \in B^r(M)_{-n}$ y $\varphi \in \mathrm{Hom}_S(M, \Omega)_n$, siendo M un S-módulo graduado cualquiera. El elemento φ se puede identificar con un elemento de $\mathrm{Hom}_S(M(-n), \Omega)_0$, es decir con un morfismo de $M(-n)$ en Ω; luego define, por paso a cohomología, un morfismo de $H^r(M(-n)) = B^r(M)_{-n}$ en $H^r(\Omega)$, que denotaremos por φ. La imagen de h por este morfismo es entonces un múltiplo escalar de ξ, y definiremos $\langle h, \varphi \rangle$ por la fórmula:

$$\varphi(h) = \langle h, \varphi \rangle \xi.$$

Para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_S(M,\Omega)_n$, la función $h \to \langle h,\varphi\rangle$ es una forma lineal sobre $B^r(M)_{-n}$, luego puede ser identificada con un elemento $\nu(\varphi)$ del dual de $B^r(M)_{-n}$, que no es otro que $T^r(M)_n$. Así pues hemos definido una aplicación homogénea de grado 0

$$\nu : \mathrm{Hom}_S(M,\Omega) \to T^r(M),$$

y la fórmula $\langle P\cdot h,\varphi\rangle = \langle h, P\cdot\varphi\rangle$ muestra que ν es un S-morfismo.

Proposición 83. *El morfismo* $\nu : \mathrm{Hom}_S(M,\Omega) \to T^r(M)$ *es biyectivo.*

Demostraremos primero la Proposición cuando M es un módulo *libre*. Si M es suma directa de submódulos homogéneos M^α, se tiene:

$$\mathrm{Hom}_S(M,\Omega)_n = \prod_\alpha \mathrm{Hom}_S(M^\alpha,\Omega)_n \quad \text{y} \quad T^r(M)_n = \prod_\alpha T^r(M^\alpha)_n.$$

Así pues, si la proposición es cierta para los M^α, lo es para M, y se reduce el caso de módulos libres al caso particular de un módulo libre con un solo generador, es decir al caso donde $M = S(m)$. Se puede entonces identificar $\mathrm{Hom}_S(M,\Omega)_n$ con $\mathrm{Hom}_S(S.S(n-m-r-1))_0$, es decir con el espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado $n-m-r-1$. Luego $\mathrm{Hom}_S(M,\Omega)_n$ admite como base la familia de monomios $t_0^{\gamma_0}\dots t_r^{\gamma_r}$, con $\gamma_i \geq 0$ y $\sum_{i=0}^{i=r}\gamma_i = n-m-r-1$. Por otro lado, hemos visto en el n$^{\mathrm{o}}$ 62 que $H_k^r(S(m-n))$ admite como base (si k es lo bastante grande) la familia de monomios $(t_0\dots t_r)^k/t_0^{\beta_0}\dots t_r^{\beta_r}$, con $\beta_i > 0$ y $\sum_{i=0}^{i=r}\beta_i = n-m$. Al poner $\beta_i = \gamma_i'+1$, se pueden escribir estos monomios de la forma $(t_0\dots t_r)^{k-1}/t_0^{\gamma_0'}\dots t_r^{\gamma_r'}$, con $\gamma_i' \geq 0$ y $\sum_{i=0}^{i=r}\gamma_i' = n-m-r+1$. Si nos remontamos a la definición de $\langle h,\varphi\rangle$, vemos entonces que el producto escalar:

$$\langle (t_0\dots t_r)^{k-1}/t_0^{\gamma_0'}\dots t_r^{\gamma_r'}, t_0^{\gamma_0}\dots t_r^{\gamma_r}\rangle$$

siempre es nulo, salvo si $\gamma_i = \gamma_i'$ para todo i, en cuyo caso es igual a 1. Esto significa que ν transforma la base de los $t_0^{\gamma_0}\dots t_r^{\gamma_r}$ en la base dual de los $(t_0\dots t_r)^{k-1}/t_0^{\gamma_0}\dots t_r^{\gamma_r}$, luego es biyectivo, lo que completa la demostración cuando M es libre.

Pasamos ahora al caso general. Escojamos una sucesión exacta

$$L^1 \to L^0 \to M \to 0$$

donde L^0 y L^1 son libres. Consideramos el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S(M,\Omega) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S(L^0,\Omega) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S(L^1,\Omega) \\
\downarrow{\scriptstyle\nu} & & \downarrow{\scriptstyle\nu} & & \downarrow{\scriptstyle\nu} & & \downarrow{\scriptstyle\nu} \\
0 & \longrightarrow & T^r(M) & \longrightarrow & T^r(L^0) & \longrightarrow & T^r(L^1).
\end{array}$$

La primera fila de este diagrama es una sucesión exacta, por las propiedades del funtor Hom_S; la segunda también es exacta, por ser la sucesión dual de la sucesión

$$B^r(L^1) \to B^r(L^0) \to B^r(M) \to 0$$

sucesión que es ella misma exacta, por la sucesión exacta de cohomología de los B^q, y del hecho de que $B^{r+1}(M) = 0$ sea cual sea el S-módulo graduado M. Por otro lado, los dos morfismos verticales

$$\nu : \mathrm{Hom}_S(L^0, \Omega) \to T^r(L^0) \quad \text{y} \quad \nu : \mathrm{Hom}_S(L^1, \Omega) \to T^r(L^1)$$

son biyectivos, como acabamos de ver. Se sigue que

$$\nu : \mathrm{Hom}_S(M, \Omega) \to T^r(M)$$

es igualmente biyectivo, lo que concluye la demostración.

72. Determinación de los $T^q(M)$. Vamos a demostrar el siguiente teorema, que generaliza la Proposición 83:

Teorema 15. *Sea M un S-módulo graduado. Para $q \neq r$, los S-módulos graduados $T^{r-q}(M)$ y $\mathrm{Ext}_S^q(M, \Omega)$ son isomorfos. Además, se tiene una sucesión exacta:*

$$0 \to \mathrm{Ext}_S^r(M, \Omega) \to T^0(M) \xrightarrow{\alpha^*} M^* \to \mathrm{Ext}_S^{r+1}(M, \Omega) \to 0.$$

Vamos a utilizar la caracterización axiomática de los funtores derivados dada en [**6**], Cap. III, §5. Para ello, definimos primero nuevos funtores $E^q(M)$ de la siguiente manera:

Para $q \neq r, r+1$, $\quad E^q(M) = T^{r-q}(M)$

Para $q = r$, $\quad E^r(M) = \ker(\alpha^*)$

Para $q = r+1$, $\quad E^{r+1}(M) = \mathrm{Coker}(\alpha^*)$.

Los $E^q(M)$ son funtores aditivos covariantes de M, gozando de las siguientes propiedades:

(i) *$E^0(M)$ es isomorfo a* $\mathrm{Hom}_S(M, \Omega)$.

Es lo que afirma la Proposición 83.

(ii) *Si L es libre, $E^q(L) = 0$ para todo $q > 0$.*

Basta comprobarlo para $L = S(n)$, en cuyo caso resulta del nº 62.

(iii) *A toda sucesión exacta $0 \to M \to N \to P \to 0$ le corresponde una sucesión de operadores cobordes $d^q : E^q(M) \to E^{q+1}(P)$, y la sucesión:*

$$\cdots \to E^q(P) \to E^q(N) \to E^q(M) \xrightarrow{d^q} E^{q+1}(P) \to \dots$$

es exacta.

La definición de d^q es evidente si $q \neq r-1, r$: es el morfismo de $T^{r-q}(M)$ en $T^{r-q-q}(P)$ definido en el nº 70. Para $q = r-1$ o r, se utiliza el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
T^1(M) & \longrightarrow & T^0(P) & \longrightarrow & T^0(N) & \longrightarrow & T^0(M) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\alpha^*} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha^*} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha^*} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha^*} \\
0 & \longrightarrow & P^* & \longrightarrow & N^* & \longrightarrow & M^* & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Este diagrama muestra enseguida que la imagen de $T^1(M)$ está contenida en el núcleo de $\alpha^* : T^0(P) \to P^*$, que no es otro que $E^r(P)$. De ahí la definición de $d^{r-1} : E^{r-1}(M) \to E^r(P)$.

Para definir $d^r : \ker(T^0(M) \to M^*) \to \mathrm{Coker}(T^0(P) \to P^*)$, se utiliza el procedimiento de [**6**]. Cap. III, Lema 3.3: si $x \in \ker(T^0(P) \to P^*)$, existen $y \in P^*$ y $z \in T^0(N)$ tales que x es imagen de z e y y z tienen la misma imagen en N^*; se pone entonces $d^r(x) = y$.

La exactitud de la sucesión

$$\cdots \to E^q(P) \to E^q(N) \to E^q(M) \xrightarrow{d^q} E^{q+1}(P) \to \ldots$$

resulta de la exactitud de la sucesión

$$\cdots \to T^{r-q}(P) \to T^{r-q}(N) \to T^{r-q}(M) \xrightarrow{d^q} T^{r-q-1}(P) \to \ldots$$

y de [**6**], loc. cit.

(iv) *El isomorfismo de* (i) *y los operadores d^q de* (iii) *son "naturales".*

Esto resulta inmediatamente de las definiciones.

Puesto que las propiedades (i) a (iv) caracterizan los funtores derivados del funtor $\mathrm{Hom}_S(M, \Omega)$, se tiene $E^q(M) \cong \mathrm{Ext}^q_S(M, \Omega)$, lo que demuestra el Teorema.

Corolario. *Si M verifica* (TF)*, $H^q(M)$ es isomorfo al espacio vectorial dual de $\mathrm{Ext}^{r-q}(M, \Omega)_0$ para todo $q \geq 1$.*

En efecto, sabemos que $H^q(M)$ es un espacio vectorial de dimensión finita luego el dual es isomorfo a $\mathrm{Ext}^{r-q}_S(M, \Omega)_0$.

Corolario. *Si M verifica* (TF)*, los $T^q(M)$ son S-módulos graduados finitamente generados para $q \geq 1$, y $T^0(M)$ verifica* (TF).

Se puede sustituir M por un módulo finitamente generado sin cambiar los $B^q(M)$, luego tampoco los $T^q(M)$. Los $\mathrm{Ext}^{r-q}_S(M, \Omega)$ son entonces S-módulos finitamente generado, y se tiene $M^* \in \mathcal{C}$, dando el Corolario.

§5. Aplicaciones a los haces algebraicos coherentes

73. Relaciones entre los funtores Ext^q_S y $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_x}$. Sean M y N dos S-módulos graduados. Si x es un punto de $X = \mathbb{P}_r(K)$, hemos definido en el nº 57 los $\mathcal{O}_x$-módulos M_x y N_x; vamos a poner en relación los $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_x}(M_x, N_x)$ con el S-módulo graduado $\mathrm{Ext}^q_S(M, N)$:

Proposición 84. *Supongamos que M es finitamente generado. Entonces:*

(a) *El haz* $\mathcal{A}(\mathrm{Hom}_S(M,N))$ *es isomorfo al haz* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}(M),\mathcal{A}(N))$.
(b) *Para todo* $x \in X$, *el* $\mathcal{O}_x$*-módulo* $\mathrm{Ext}^q_S(M,N)_x$ *es isomorfo a* $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_x}(M_x.N_x)$.

Definamos primero un morfismo $\iota_x : \mathrm{Hom}_S(M,N)_x \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(M_x,N_x)$. Un elemento del primer módulo es una fracción φ/P, con $\varphi \in \mathrm{Hom}_S(M,N)_n$, $P \in S(x)$, P homogéneo de grado n; si m/P' es un elemento de M_x, $\varphi(m)/PP'$ es un elemento de N_x que solo depende de φ/P y de m/P', y la aplicación $m/P' \to \varphi(m)/PP'$ es un morfismo $\iota_x(\varphi/P) : M_x \to N_x$; queda definido ι_x. Por la Proposición 13 del nº 14, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(M_x,N_x)$ se puede identificar con

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}(M),\mathcal{A}(N))_x;$$

esta identificación transforma ι_x en

$$\iota_x : \mathcal{A}(\mathrm{Hom}_S(M,N))_x \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}(M),\mathcal{A}(N))_x,$$

y se verifica fácilmente que la colección de los ι_x es un morfismo

$$\iota : \mathcal{A}(\mathrm{Hom}_S(M,N)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}(M),\mathcal{A}(N)).$$

Cuando M es un módulo libre finitamente generado, ι_x es biyectivo: en efecto, basta con verlo cuando $M = S(n)$, donde es inmediato.

Si ahora M es un S-módulo graduado finitamente generado cualquiera, escogemos una resolución de M:

$$\cdots \to L^{q+1} \to L^q \to \cdots \to L^0 \to M \to 0,$$

donde los L^q son libres finitamente generados, y consideramos el complejo C formado por los $\mathrm{Hom}_S(L^q,N)$. Los grupos de cohomología de C son los $\mathrm{Ext}^q_S(M,N)$; dicho de otra manera, si se designan por B^q y Z^q los submódulos de C^q formados respectivamente por los cobordes y cociclos, se tienen sucesiones exactas:

$$0 \to Z^q \to C^q \to B^{q+1} \to 0,$$

y

$$0 \to B^q \to Z^q \to Ext^q_S(M,N) \to 0.$$

Como el funtor $\mathcal{A}(M)$ es exacto, las sucesiones

$$0 \to Z^q_x \to C^q_x \to B^{q+1}_x \to 0,$$

y

$$0 \to B^q_x \to Z^q_x \to Ext^q_S(M,N)_x \to 0.$$

también son exactas.

Sin embargo, por lo anterior, C_x^q es isomorfo a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(L_x^q, N_x)$; los $\mathrm{Ext}_S^q(M,N)_x$ son isomorfos a los grupos de cohomología del complejo formado por los $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(L_x^q, N_x)$, y como los L_x^q son evidentemente $\mathcal{O}_x$-libres, se recupera la definición de los $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_x}(M_x, N_x)$, lo que demuestra (b); para $q = 0$, lo anterior muestra que ι_x es biyectiva, luego ι es un isomorfismo, dando (a),

74. Nulidad de los grupos de cohomología $H^q(X, \mathcal{F}(-n))$ para $n \to \infty$.

TEOREMA 16. *Sea $\mathcal{F}$ un haz algebraico coherente sobre X, y sea q un entero ≥ 0. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $H^q(X, \mathcal{F}(-n)) = 0$ *para n lo bastante grande.*
(b) $\mathrm{Ext}^{r-q}_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{F}_x, \mathcal{O}_x) = 0$ *para todo $x \in X$.*

Por el Teorema 12 del nº 60, se puede suponer que $\mathcal{F} = \mathcal{A}(M)$, donde M es un S-módulo graduado finitamente generado y, por el nº 64, $H^q(X, \mathcal{F}(-n))$ es isomorfo a $H^q(M(-n)) = B^q(M)_{-n}$; luego la condición (a) equivale a

$$T^q(M)_n = 0$$

para n lo bastante grande, es decir que $T^q(M) \in \mathcal{C}$. Por el Teorema 15 del nº 72 y el hecho de que $M^* \in \mathcal{C}$ porque M es finitamente generado, esta última condición equivale a que $\mathrm{Ext}_S^{r-q}(M, \Omega) \in \mathcal{C}$; como $\mathrm{Ext}_S^{r-q}(M, \Omega)$ es un S-módulo finitamente generado,

$$\mathrm{Ext}_S^{r-q}(M, \Omega) \in \mathcal{C}$$

equivale a $\mathrm{Ext}_S^{r-q}(M, \Omega)_x = 0$ para todo $x \in X$, por la Proposición 68 del nº 58; finalmente, la Proposición 84 muestra que $\mathrm{Ext}_S^{r-q}(M, \Omega)_x = \mathrm{Ext}^{r-q}_{\mathcal{O}_x}(M_x, \Omega_x)$, y como M_x es isomorfo a $\mathcal{F}_x$, y Ω_x es isomorfo a $\mathcal{O}(-r-1)_x$, luego a $\mathcal{O}_x$, esto termina la demostración.

Para enunciar el Teorema 17, nos hará falta la noción de *dimensión* de un $\mathcal{O}_x$-módulo. Recordamos ([**6**], Cap. VI, §2) que un $\mathcal{O}_x$-módulo finitamente generado P se dice de dimensión $\leq p$ si existe una sucesión exacta de $\mathcal{O}_x$-módulos:

$$0 \to L_p \to L_{p-1} \to \cdots \to L_0 \to P \to 0,$$

donde cada L_p es libre (esta definición equivale a la de [**6**], loc. cit., debido a que todo $\mathcal{O}_x$-módulo proyectivo finitamente generado es libre - ver [**6**], Cap. VIII, Th. 6.1').

Todo $\mathcal{O}_x$-módulo finitamente generado es de dimensión $\leq r$, por el teorema de las sizigias (ver [**6**], Cap. VIII, Th. 6.2').

LEMA 17. *Sean P un $\mathcal{O}_x$-módulo finitamente generado, y sea p un entero ≥ 0. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *P es de dimensión $\leq p$.*
(ii) $\mathrm{Ext}^m_{\mathcal{O}_x}(P, \mathcal{O}_x) = 0$ *para todo $m > p$.*

Está claro que (i) implica (ii). Demostremos que (ii) implica (i) por recurrencia descendente sobre p, para $p \geq r$, el Lema es trivial, porque (i) siempre se verifica; pasamos ahora de $p+1$ a p; sea N un $\mathcal{O}_x$-módulo finitamente generado cualquiera. Se puede encontrar una sucesión exacta $0 \to R \to L \to N \to 0$, donde L es libre finitamente generado (porque $\mathcal{O}_x$ es noetheriano). La sucesión exacta

$$\operatorname{Ext}^{p+1}_{\mathcal{O}_x}(P, L) \to \operatorname{Ext}^{p+1}_{\mathcal{O}_x}(P, N) \to \operatorname{Ext}^{p+2}_{\mathcal{O}_x}(P, R)$$

muestra que $\operatorname{Ext}^{p+1}_{\mathcal{O}_x} = 0$: en efecto, se tiene $\operatorname{Ext}^{p+1}_{\mathcal{O}_x}(P, L) = 0$ por la condición (ii), y $\operatorname{Ext}^{p+2}_{\mathcal{O}_x}(P, R) = 0$ porque $\dim P \leq p+1$ por hipótesis de recurrencia. Como esta propiedad caracteriza a los módulos de dimensión $\leq p$, el Lema queda demostrado.

Al combinar el Lema con el Teorema 16, se obtiene:

Teorema 17. *Sea $\mathcal{F}$ un haz algebraico coherente sobre X, y sea p un entero ≥ 0. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *$H^q(X, \mathcal{F}(-n)) = 0$ para n lo bastante grande y $0 \leq q < p$.*
(b) *Para todo $x \in X$, el $\mathcal{O}_x$-módulo $\mathcal{F}_x$ es de dimensión $\leq r - p$.*

75. Variedades no singulares. El siguiente resultado juega un papel esencial en la extensión al caso abstracto del "teorema de dualidad" de [**15**]:

Teorema 18. *Sea V una subvariedad sin singularidades del espacio proyectivo $\mathbb{P}_r(K)$; supongamos que todas las componentes irreducibles de V tienen la misma dimensión p. Sea $\mathcal{F}$ un haz algebraico coherente sobre V tal que, para todo $x \in V$, $\mathcal{F}_x$ sea un módulo libre sobre $\mathcal{O}_{x,V}$. Se tiene entonces $H^q(V, \mathcal{F}(-n)) = 0$ para n lo bastante grande y $0 \leq q < p$.*

Por el Teorema 17, todo se reduce a probar que $\mathcal{O}_{x,V}$, considerado como $\mathcal{O}_x$-módulo, es de dimensión $\leq r - p$. Designemos por $\mathcal{I}_x(V)$ el núcleo del morfismo canónico $\varepsilon_x : \mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_{x,V}$; puesto que el punto x es simple sobre V, se sabe (ver [**18**], th. 1) que este ideal está generado por $r - p$ elementos $f_1, \ldots, f_{r-p}$, y el teorema de Cohen-Macaulay (ver [**13**], p. 53, prop. 2) muestra que se tiene

$$(f_1, \ldots, f_{i-1}) : f_i = (f_1, \ldots, f_{i-1}) \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq r - p.$$

Designemos entonces por L_q el $\mathcal{O}_x$-módulo libre que admite como base los elementos $e\langle i_1 \ldots i_q \rangle$ correspondientes a las sucesiones $(i_1, \ldots, i_q)$ tales que

$$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_q \leq r - p;$$

para $q = 0$, tomamos $L_0 = \mathcal{O}_x$, y pongamos:

$$d(e\langle i_1 \ldots i_q \rangle) = \sum_{j=1}^{j=q} (-1)^j f_{i_j} \cdot e\langle i_1 \ldots \hat{i}_j \ldots i_q \rangle$$
$$d(e\langle i \rangle) = f_i.$$

Por [**6**], Cap. VIII, prop. 4.3, la sucesión

$$0 \to L_{r-p} \xrightarrow{d} L_{r-p-1} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} L_0 \xrightarrow{\varepsilon_x} \mathcal{O}_{x,V} \to 0$$

es exacta, lo que prueba que $\dim_{\mathcal{O}_{x,V}} \leq r-p$.

COROLARIO. *Se tiene* $H^q(V, \mathcal{O}_v(-n)) = 0$ *para* n *lo bastante grande y* $0 \leq q < p$.

OBSERVACIÓN. La demostración de arriba se aplica, más generalmente, siempre que el ideal $\mathcal{I}_x(V)$ admita un sistema de $r-p$ generadores, dicho de otra forma, siempre que la variedad V sea *localmente una intersección completa* en todo punto.

76. Variedades normales. Nos hará falta el siguiente Lema:

LEMA 18. *Sea* M *un* $\mathcal{O}_x$*-módulo finitamente generado, y sea* f *un elemento no invertible de* $\mathcal{O}_x$*, tal que la relación* $f \cdot m = 0$ *implica* $m = 0$ *si* $m \in M$*. La dimensión del* $\mathcal{O}_x$*-módulo* M/fM *es entonces igual a la dimensión de* M *aumentada en una unidad.*

Por hipótesis, se tiene una sucesión exacta $0 \to M \xrightarrow{\alpha} M \to M/fM \to 0$, donde α es la multiplicación por f. Si N es un $\mathcal{O}_x$-módulo finitamente generado, se tiene una sucesión exacta:

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_x}(M, N) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_x}(M, N) \to \mathrm{Ext}^{q+1}_{\mathcal{O}_x}(M/fM, N) \to \mathrm{Ext}^{q+1}_{\mathcal{O}_x}(M, N) \to \ldots$$

Sea p la dimensión de M. Poniendo $q = p+1$ en la sucesión exacta anterior, se ve que $\mathrm{Ext}^{p+2}_{\mathcal{O}_x}(F/fM, N) = 0$, lo que implica ([**6**], Cap. VI, §2) que $\dim(M/fM) \leq p+1$. Por otro lado, como $\dim M = p$, se puede escoger un N tal que $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_x}(M, N) \neq 0$; al tomar entonces $q = p$ en la sucesión exacta de arriba, se ve que $\mathrm{Ext}^{p+1}_{\mathcal{O}_x}(M/fM, N)$ se identifica con el conúcleo de

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_x}(M, N) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_x}(M, N);$$

como el último morfismo no es más que la multiplicación por f, y f no es invertible en el anillo local $\mathcal{O}_x$, resulta de [**6**], Cap. VIII, prop. 5.1' que este conúcleo es $\neq 0$, lo que implica que $\dim M/fM \geq p+1$ y concluye la demostración.

Vamos ahora a demostrar un resultado que guarda relación con el "lema de Enriques-Severi", debido a Zariski [**19**]:

TEOREMA 19. *Sea* V *una subvariedad irreducible, normal, de dimensión* ≥ 2*, del espacio proyectivo* $\mathbb{P}_r(K)$*. Sea* $\mathcal{F}$ *un haz algebraico coherente sobre* V *tal que, para cada* $x \in V$*,* $\mathcal{F}_x$ *es un módulo libre sobre* $\mathcal{O}_{x,V}$*. Se tiene entonces que* $H^1(V, \mathcal{F}(-n)) = 0$ *para* n *lo bastante grande.*

Por el Teorema 17, todo se reduce a mostrar que $\mathcal{O}_{x,V}$, considerado como $\mathcal{O}_x$-módulo, es de dimensión $\leq r-2$. Escojamos primero un elemento $f \in \mathcal{O}_x$, tal que $f(x) = 0$ y la imagen de f en $\mathcal{O}_{x,V}$ es no nula; esto es posible porque $\dim V > 0$. Como V es irreducible, $\mathcal{O}_{x,V}$ es un anillo íntegro, y se le puede aplicar el Lema 18 a la pareja $(\mathcal{O}_{x,V}, f)$; lo que da:

$$\dim \mathcal{O}_{x,V} = \dim \mathcal{O}_{x,V}/(f) - 1, \quad \text{con} \quad (f) = f \cdot \mathcal{O}_{x,V}.$$

Como $\mathcal{O}_{x,V}$ es un anillo íntegramente cerrado, todos los ideales primos $\mathfrak{p}^\alpha$ del ideal principal (f) son minimales (ver [**12**], p. 136, o [**9**], n$^{\text{o}}$ 37), y ninguno de ellos es entonces igual al ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}_{x,V}$ (si no fuera así, $\dim V \leq 1$). Se puede entonces encontrar un elemento $g \in \mathfrak{m}$ que no pertenece a ninguno de los $\mathfrak{p}^\alpha$; este elemento g no es divisor del 0 en el anillo cociente $\mathcal{O}_{x,V}$; llámese $\overline{g}$ a un representante de g en $\mathcal{O}_x$, vemos que se puede aplicar el Lema 18 a la pareja $(\mathcal{O}_{x,V}/(f), \overline{g})$; se tiene entonces:

$$\dim \mathcal{O}_{x,V}/(f) = \dim \mathcal{O}_{x,V}/(f,g) - 1.$$

Pero, por el teorema de las sizigias ya mencionado, se tiene $\dim \mathcal{O}_{x,V}/(f,g) \leq r$; de ahí que $\dim \mathcal{O}_{x,V}/(f) \leq r-1$ y $\dim \mathcal{O}_{x,V} \leq r-2$.

Corolario. *Se tiene* $H^1(V, \mathcal{O}_V(-n)) = 0$ *para* n *lo bastante grande.*

Observaciones. (1) El razonamiento hecho más arriba es clásico en teoría de sizigias. Ver por ejemplo W. Gröbner, *Moderne Algebraische Geometrie*, 152.6 y 153.1.

(2) Igualmente si la dimensión de V es > 2, se puede tener $\dim \mathcal{O}_{x,V} = r-2$. En particular, esto es lo que ocurre cuando V es un cono luego la sección hiperplana W es una variedad proyectivamente normal e irregular (es decir, $H^1(W, \mathcal{O}_W) \neq 0$).

77. Caracterización homológica de las variedades k-veces de primera especie. Sea M un S-módulo graduado finitamente generado. Se demuestra, por un razonamiento idéntico al Lema 17:

Lema 19. *Para que* $\dim M \leq k$, *es necesario y suficiente que* $\mathrm{Ext}_S^q(M,S) = 0$ *para* $q > k$.

Como M es graduado, se tiene $\mathrm{Ext}_S^q(M,\Omega) = \mathrm{Ext}_S^q(M,S)(-r-1)$, luego la condición de arriba equivale a $\mathrm{Ext}_S^q(M,\Omega) = 0$ para k. Teniendo el cuenta el Teorema 15 del nº 72, se concluye con que:

Proposición 85. (a) *Para que* $\dim M \leq r$, *es necesario y suficiente que* $\alpha : M_n \to H^0(M(n))$ *sea inyectivo para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

(b) *Si* k *es un entero* ≥ 1, *para que* $\dim M \leq r$, *es necesario y suficiente que* $\alpha : M_n \to H^0(M(n))$ *sea biyectivo para todo* $n \in \mathbb{Z}$, *y que* $H^q(M(n)) = 0$ *para* $0 < q < k$ *y todo* $n \in \mathbb{Z}$.

Sea V una subvariedad cerrada de $\mathbb{P}_r(K)$, y sea $I(V)$ el ideal de polinomios homogéneos nulos sobre V. Pongamos $S(V) = S/I(V)$, es un S-módulo graduado cuyo haz asociado no es otro que $\mathcal{O}_V$. Diremos[10] que V es una subvariedad "k-veces de primera especie" de $\mathbb{P}_r(K)$ si la dimensión del S-módulo $S(V)$ es $\leq r-k$. Es inmediato que $\alpha : S(V)_n \to H^0(V, \mathcal{O}_V(N))$ es inyectivo para todo $n \in \mathbb{Z}$, luego toda variedad es 0-veces de primera especie. Al aplicar la Proposición anterior a $M = S(V)$, se obtiene:

Proposición 86. *Sea* k *un entero* ≥ 1. *Para que la subvariedad* V *sea* k*-veces de primera especie, es necesario y suficiente que se verifiquen las siguientes condiciones para todo* $n \in \mathbb{Z}$:

(i) $\alpha : S(V)_n \to H^0(V, \mathcal{O}_V(n))$ *es biyectivo.*

[10] Ver P. Dubreil, *Sur la dimension des idéaux de polynômes*, J. Math. Pures App., 15, 1936, p.271-283. Ver también W. Gröbner, Moderne Algebraische Geometrie, §5.

(ii) $H^q(V, \mathcal{O}_V(n)) = 0$ *para* $0 < q < k$.

(La condición (i) también se puede expresar diciendo que la serie lineal cortada en V por las formas de grado n es completa, lo que es bien conocido).

Comparando con el Teorema 17 (o razonando directamente), se obtiene:

COROLARIO. *Si V es k-veces de primera especie, se tiene $H^q(V, \mathcal{O}_V) = 0$ para $0 < q < k$ y, para todo $x \in V$, la dimensión del $\mathcal{O}_x$-módulo $\mathcal{O}_{x,V}$ es $\leq r - k$.*

Si m es un entero ≥ 1, denotamos φ_m la inmersión de $\mathbb{P}_r(K)$ en un espacio proyectivo de dimensión adecuada dada por los monomios de grado m (ver [**8**], Cap. XVI, §6, o bien nº 52, demostración del Lema 11). El corolario de arriba admite entonces el siguiente recíproco:

PROPOSICIÓN 87. *Sea k un entero ≥ 1, y sea V una subvariedad conexa y cerrada de $\mathbb{P}_r(K)$. Supongamos que $H^q(V, \mathcal{O}_V) = 0$ para $0 < q < k$, y que, para todo $x \in V$, la dimensión del $\mathcal{O}_x$-módulo $\mathcal{O}_{x,V}$ sea $\leq r - k$.*

Entonces, para cada m lo bastante grande, $\varphi_m(V)$ es una subvariedad k-veces de primera especie.

Del hecho de que V es conexa, se tiene $H^0(V, \mathcal{O}_V) = K$. En efecto, si V es irreducible, es evidente (si no $H^0(V, \mathcal{O}_V)$ contendría una álgebra de polinomios, y no sería de dimensión finita sobre K); si V es reducible, todo elemento $f \in H^0(V, \mathcal{O}_V)$ induce una constante sobre cada componente irreducible de V, y las constantes son las mismas por la conexión de V.

Del hecho de que $\dim \mathcal{O}_{x,V} \leq r - 1$, la dimensión algebraica de alguna componente irreducible de V es al menos igual a 1. Resulta que

$$H^0(V, \mathcal{O}_V(-n)) = 0$$

para $n > 0$ (porque si $f \in H^0(V, \mathcal{O}_V(-n))$ y $f \neq 0$, las $f^k \cdot g$, con $g \in S(V)_{nk}$ formarían un subespacio vectorial de $H^0(V, \mathcal{O}_V)$ de dimensión > 1).

Una vez precisado esto, denotamos V_m la subvariedad $\varphi_m(V)$; se tiene evidentemente

$$\mathcal{O}_{V_m}(n) = \mathcal{O}_V(nm).$$

Para m lo bastante grande, se satisfacen las siguientes condiciones:

(a) $\alpha : S(V)_{nm} \to H^0(V, \mathcal{O}_V(nm))$ es biyectivo para todo $n \geq 1$.

Resulta de la Proposición 77 del nº 65.

(b) $H^q(V, \mathcal{O}_V(nm)) = 0$ para $0 < q < k$ y para todo $n \geq 1$.

Resulta de la Proposición 77 del nº 65.

(c) $H^q(V, \mathcal{O}_V(nm)) = 0$ para $0 < q < k$ y para todo $n \leq -1$.

Resulta del Teorema 17 del nº 74, y de la hipótesis hecha sobre los $\mathcal{O}_{x,V}$.

Por otro lado, se tiene $H^0(V, \mathcal{O}_V) = K$, $H^0(V, \mathcal{O}_V(nm)) = 0$ para todo $n \leq -1$, y $H^q(V, \mathcal{O}_V) = 0$ para $0 < q < k$, en virtud de la hipótesis. Se sigue que V_m verifica todas las hipótesis de la Proposición 86, y se acaba.

Corolario. *Sea k un entero ≥ 1, y sea V una variedad proyectiva sin singularidades, de dimensión $\geq k$. Para que V sea birregularmente isomorfa a una subvariedad k-veces de primera especie de un espacio proyectivo adecuado, es necesario y suficiente que V sea conexa y que $H^q(V, \mathcal{O}_V) = 0$ para $0 < q < k$.*

La necesidad es evidente, por la Proposición 86. Para demostrar la suficiencia, basta notar que $\mathcal{O}_{x,V}$ es entonces de dimenisón $\leq r - k$ (ver nº 65) y aplicar la Proposición anterior.

78. Intersecciones completas. Una subvariedad V de dimensión p del espacio proyectivo $\mathbb{P}_r(K)$ es una *intersección completa* si el ideal $I(V)$ de polinomios nulos sobre V admite un sistema de $r - p$ generadores $P_1, \ldots, P_{r-p}$; en este caso, todas las componentes irreducibles de V tienen dimensión p, por el teorema de Macaulay (ver [**9**], nº 17). Es bien conocido que una tal variedad es p-veces de primera especie, lo que implica que $H^q(V, \mathcal{O}_V(n)) = 0$ para $0 < q < p$, como acabamos de ver. Vamos a determinar $H^p(V, \mathcal{O}_V(n))$ en función de los grados $m_1, \ldots, m_{r-p}$ de los polinomios homogéneos $P_1, \ldots, P_{r-p}$.

Sea $S(V) = S/I(V)$ el anillo de coordenadas proyectivas de V. Por el Teorema 15 del nº 72, todo se reduce a determinar el S-módulo $\mathrm{Ext}_S^{r-p}(S(V), \Omega)$. Ahora bien, se tiene una resolución análoga a la del nº 75: tomando como L^q el S-módulo graduado libre que admite como base los elementos $e\langle i_1 \ldots i_q\rangle$ correspondientes a las sucesiones $(i_1 \ldots i_q)$ tales que $1 \leq i_1 < i_2 \ldots < i_q \leq r - p$, y de grados $\sum_{j=1}^{j=q} m_j$; para L^0, se toma S. Ponemos

$$d(e\langle i_1 \ldots i_q\rangle) = \sum_{j=1}^{j=q} (-1)^j P_{i_j} \cdot e\langle i_1 \ldots \hat{i}_j \ldots i_q\rangle$$

$$d(e\langle i\rangle) = P_i.$$

La sucesión $0 \to L^{r-p} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} L^0 \to S(V) \to 0$ es exacta ([**6**], Cap. VIII, Prop. 4.3). Resulta que los $\mathrm{Ext}_S^q(S(V), \Omega)$ son los grupos de cohomología del complejo formado por los $\mathrm{Hom}_S(L^q, \Omega)$; pero se puede identificar un elemento de $\mathrm{Hom}_S(L^q, \Omega)_n$ con un sistema $f\langle i_1 \ldots i_q\rangle$, donde los $f\langle i_1 \ldots i_q\rangle$ son polinomios homogéneos de grados $m_{i_1} + \cdots + m_{i_q} + n - r - 1$; una vez hecha esta identificación, el operador coborde está dado por la fórmula usual:

$$df\langle i_1 \ldots i_{q+1}\rangle = \sum_{j=1}^{j=q+1} (-1)^j P_{i_j} \cdot f\langle i_1 \ldots \hat{i}_j \ldots i_{q+1}\rangle$$

El teorema de Macaulay ya citado muestra que estamos en las condiciones de [**11**], y se recupera el hecho de que $\mathrm{Ext}_S^q(S(V), \Omega) = 0$ para $q \neq r - p$. Por otro lado, $\mathrm{Ext}_S^{r-p}(S(V), \Omega)_n$ es isomorfo al subespacio de $S(V)$ de los elementos homogéneos de grado $N + n$, con $N = \sum_{i=1}^{i=r-p} m_i - r - 1$. Teniendo en cuenta el Teorema del nº 72, obtenemos:

PROPOSICIÓN 88. *Sea V una intersección completa, definida por los polinomios homogéneos $P_1, \dots, P_{r-p}$, de grados $m_1, \dots, m_{r-p}$.*

(a) *La aplicación $\alpha : S(V)_n \to H^0(V, \mathcal{O}_V(n))$ es biyectiva para todo $n \in \mathbb{Z}$.*
(b) *$H^q(V, \mathcal{O}_V(n)) = 0$ para $0 < q < p$ y todo $n \in \mathbb{Z}$.*
(c) *$H^p(V, \mathcal{O}_V(n))$ es isomorfo al espacio vectorial dual de $H^0(V, \mathcal{O}_V(N - n))$, con $N = \sum_{i=1}^{i=r-p} m_i - r - 1$.*

Nótese, en particular, que $H^p(V, \mathcal{O}_V)$ solo es 0 si $N < 0$.

§6. La función característica y el género aritmético

79. Característica de Euler-Poincaré. Sea V una variedad proyectivo, y sea $\mathcal{F}$ un haz algebraico coherente sobre V. Pongamos:

$$h^q(V, \mathcal{F}) = \dim_K H^q(V, \mathcal{F}).$$

Hemos visto (nº 66, Teorema 13), que los $h^q(V, \mathcal{F})$ son *finitos* para todo entero q, y nulos para $q > \dim V$. Se puede entonces definir un entero $\chi(V, \mathcal{F})$ poniendo:

$$\chi(V, \mathcal{F}) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q h^q(V, \mathcal{F}).$$

Es la *característica de Euler-Poincaré* de V, con coeficientes en $\mathcal{F}$.

LEMA 20. *Sea $0 \to L_1 \to \cdots \to L_p \to 0$ una sucesión exacta, siendo los L_i espacios vectoriales de dimensión finita sobre K, y siendo K-lineales los morfismos $L_i \to L_{i+1}$. Se tiene entonces:*

$$\sum_{q=1}^{q=p} (-1)^q \dim_K L_q = 0.$$

Razonamos por inducción sobre p, siendo evidente el lema cuando $p \leq 3$; si L'_{p-1} designa el núcleo de $L_{p-1} \to L_p$, se tienen dos sucesiones exactas:

$$0 \to L_1 \to \cdots \to L'_{p-1} \to 0$$
$$0 \to L'_{p-1} \to L_{p-1} \to L_p \to 0$$

Aplicando la hipótesis de inducción a cada una de estas sucesiones, se ve que

$$\sum_{q=1}^{q=p-2} (-1)^q \dim L_q + (-1)^{p-1} \dim L'_{p-1} = 0,$$

y

$$\dim L'_{p-1} - \dim L_{p-1} + \dim L_p = 0,$$

dando inmediatamente el Lema.

PROPOSICIÓN 89. *Sea* $0 \to A \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$ *una sucesión exacta de haces algebraicos coherentes sobre una variedad proyectiva* V*, siendo* K*-lineales los morfismos* $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *y* $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$*. Se tiene entonces:*

$$\chi(V, \mathcal{B}) = \chi(V, \mathcal{A}) + \chi(V, \mathcal{C}).$$

Por el segundo Corolario al Teorema 9 del nº 47, se tiene una sucesión exacta de cohomología

$$\cdots \to H^q(V, \mathcal{B}) \to H^q(V, \mathcal{C}) \to H^{q+1}(V, \mathcal{A}) \to H^{q+1}(V, \mathcal{B}) \to \ldots$$

Al aplicar el Lema 20 a esta sucesión exacta de espacios vectoriales, se obtiene la Proposición.

PROPOSICIÓN 90. *Sea* $0 \to \mathcal{F}_1 \to \cdots \to \mathcal{F}_p \to 0$ *una sucesión exacta de haces algebraicos coherentes sobre una variedad proyectiva* V*, siendo algebraicos los morfismos* $\mathcal{F}_i \to \mathcal{F}_{i+1}$*. Se tiene entonces:*

$$\sum_{q=1}^{q=p} \chi(V, \mathcal{F}_q) = 0.$$

Razonando por inducción sobre p, la Proposición es un caso particular de la Proposición 89 cuando $p \leq 3$. Si se denota por $\mathcal{F}'_{p-1}$ el núcleo de $\mathcal{F}_{p-1} \to \mathcal{F}_p$, el haz $\mathcal{F}'_{p-1}$ es algebraico coherente porque $\mathcal{F}_{p-1} \to \mathcal{F}_p$ es un morfismo algebraico. Se puede entonces aplicar la hipótesis de inducción las sucesiones exactas

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \cdots \to \mathcal{F}'_{p-1} \to 0$$
$$0 \to \mathcal{F}'_{p-1} \to \mathcal{F}_{p-1} \to \mathcal{F}_p \to 0$$

y la Proposición resulta de inmediato.

80. Relación con la función característica de un S-módulo graduado. Sea $\mathcal{F}$ un haz algebraico coherente sobre el espacio $\mathbb{P}_r(K)$; escribiremos $\chi(\mathcal{F})$ en vez de $\chi(\mathbb{P}_r(K), \mathcal{F})$. Se tiene:

PROPOSICIÓN 91. $\chi(\mathcal{F}(n))$ *es un polinomio en* n *de grado* $\leq r$*.*

Por el Teorema 12 del nº 60, existe un S-módulo graduado M finitamente generado tal que $\mathcal{A}(M)$ es isomorfo a $\mathcal{F}$. Aplicando a M el teorema de las sizigias de Hilbert, obtenemos una sucesión exacta de S-módulos graduados:

$$0 \to L^{r+1} \to \cdots \to L^0 \to M \to 0,$$

donde los L^q son libres finitamente generados. Al aplicar el funtor $\mathcal{A}$ a esta sucesión, obtenemos una sucesión exacta de haces:

$$0 \to \mathcal{L}^{r+1} \to \cdots \to \mathcal{L}^0 \to \mathcal{F} \to 0,$$

donde cada $\mathcal{L}^q$ es isomorfo a una suma directa finita de haces $\mathcal{O}(n_i)$. La Proposición 90 muestra que $\chi(\mathcal{F}(n))$ es igual a la suma alternada de los $\chi(\mathcal{L}^q(n))$, lo que nos restringe al caso del haz $\mathcal{O}(n_i)$. Ahora bien, resulta del nº 62 que se tiene $\chi(\mathcal{O}(n)) = \binom{n+r}{r}$, que es un polinomio en n, de grado $\leq r$; dando la Proposición.

Proposición 92. *Sea M un S-módulo graduado verificando la condición* (TF)*, y sea $\mathcal{F} = \mathcal{A}(M)$. Para todo n lo bastante grande, se tiene $\chi(\mathcal{F}(n)) = \dim_K M_n$.*

En efecto, sabemos (nº 65) que, para n lo bastante grande, el morfismo $\alpha : M_n \to H^0(X, \mathcal{F}(n))$ es biyectivo, y $H^q(X, \mathcal{F}(n)) = 0$ para todo $q > 0$; se tiene entonces

$$\chi(\mathcal{F}(n)) = h^0(X, \mathcal{F}(n)) = \dim_K M_n.$$

Se recupera el hecho bien conocido de que $\dim_K M_n$ es un polinomio en n para n lo bastante grande; este polinomio, que denotaremos P_M, se llama la *función característica* de M; para todo $n \in Z$, se tiene $P_M(n) = \chi(\mathcal{F}(n))$, y, en particular, para $n = 0$, se ve que el término constante de P_M es igual a $\chi(\mathcal{F})$.

Aplicamos esto a $M = S/I(V)$, siendo $I(V)$ el ideal homogéneo de S formado por los polinomios nulos sobre una subvariedad cerrada V de $\mathbb{P}_r(K)$. El término constante de P_M se llama, en este caso, el *género aritmético* de V (ver [**19**]); como por otro lado se tiene $\mathcal{A}(M) = \mathcal{O}_V$, obtenemos:

Proposición 93. *El género aritmético de una variedad proyectiva V es igual a*

$$\chi(V, \mathcal{O}_V) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \dim_K H^q(V, \mathcal{O}_V).$$

Observaciones. (1) La proposición anterior pone en evidencia el hecho de que el género aritmético es independiente de la inmersión de V en un espacio proyectivo, porque lo son los $H^q(V, \mathcal{O}_V)$.

(2) El género aritmético *virtual* (definido por Zariski en [**19**]) se puede igualmente reducir a una característica de Euler-Poincaré. Volveremos en el futuro a esta cuestión, estrechamente ligada al teorema de Riemann-Roch.

(3) Por razones de comodidad, hemos adoptado una definición del género aritmético ligeramente diferente de la definición clásica (ver [**19**]). Si todas las componentes irreducibles de V tienen la misma dimensión p, las dos dimensiones están relacionadas por la siguiente fórmula: $\chi(V, \mathcal{O}_V) = 1 + (-1)^p p_a(V)$.

81. Grado de la función característica. Si $\mathcal{F}$ es un haz algebraico coherente sobre una variedad algebraica V, llamaremos *soporte* de $\mathcal{F}$, y denotaremos $\mathrm{Sop}(\mathcal{F})$, al conjunto de los puntos $x \in V$ tales que $\mathcal{F}_x \neq 0$. Del hecho de que $\mathcal{F}$ es un haz de tipo finito, este conjunto es *cerrado*: en efecto, si se tiene $\mathcal{F}_x = 0$, la sección nula genera $\mathcal{F}_x$, luego también $\mathcal{F}_y$ para y lo bastante cerca de x (nº 12, Proposición 9), lo que significa que el complementario de $\mathrm{Sop}(\mathcal{F})$ es abierto.

Sea M un S-módulo graduado finitamente generado, y sea $\mathcal{F} = \mathcal{A}(M)$ el haz definido por M sobre $\mathbb{P}_r(K) = X$. Se puede determinar $\mathrm{Sop}(\mathcal{F})$ a partir de M de la siguiente manera:

Sea $0 = \bigcap_\alpha M^\alpha$ una descomposición de 0 como intersección de submódulos primarios homogéneos M^α de M, donde cada M^α corresponda al ideal primo homogéneo $\mathfrak{p}^\alpha$ (ver [**12**], Cap. IV); supondremos que esta descomposición es “la más corta posible”, es decir, que ninguno de los M^α está contenido en la intersección de los otros. Para todo $x \in X$, cada $\mathfrak{p}^\alpha$ define un ideal primo $\mathfrak{p}^\alpha_x$ del anillo local $\mathcal{O}_x$, y se tiene $\mathfrak{p}^\alpha_x = \mathcal{O}_x$ si y solamente si x no pertenece a la variedad V^α definida por el ideal $\mathfrak{p}^\alpha$. Se tiene igualmente $0 = \bigcap_\alpha M^\alpha_x$ en M_x, y se verifica sin dificultad que así se obtiene una descomposición primaria de 0 en M_x, donde los M^α_x corresponden a los ideales primos $\mathfrak{p}^\alpha_x$; si $x \notin V^\alpha$, se tiene $M^\alpha_x = M_x$, y, si uno se limita a considerar los M^α_x tales que $x \neq V^\alpha$, se obtiene una descomposición “lo más corta posible”(ver [**12**], Cap. IV, th. 4, donde se establecen resultados análogos). Se concluye enseguida con que $M_x \neq 0$ si y solamente si x pertenece a una de las variedades V^α, dicho de otra manera $\mathrm{Sop}(\mathcal{F}) = \bigcup_\alpha V^\alpha$.

Proposición 94. *Si $\mathcal{F}$ es un haz algebraico coherente sobre $\mathbb{P}_r(K)$, el grado del polinomio $\chi(\mathcal{F}(n))$ es igual a la dimensión de* $\mathrm{Sop}(\mathcal{F})$.

Razonaremos por inducción sobre r, siendo el caso $r = 0$ trivial. Podemos suponer que $\mathcal{F} = \mathcal{A}(M)$, donde M es un S-módulo graduado finitamente generado; utilizando las notaciones introducidas más arriba, debemos mostrar que $\chi(\mathcal{F}(n))$ es un polinomio de grado $q = \sup \dim V^\alpha$.

Sea t una forma lineal homogénea que no pertenezca a ninguno de los ideales primos $\mathfrak{p}^\alpha$, salvo quizás al ideal primo “impropio” $\mathfrak{p}^0 = (t_0, \ldots, t_r)$; una tal forma existe porque el cuerpo K es infinito. Sea E el hiperplano de X de ecuación $t = 0$. Consideremos la sucesión exacta:

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_E \to 0,$$

donde $\mathcal{O} \to \mathcal{O}_E$ es el morfismo de restricción y $\mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}$ es el morfismo $f \to t \cdot f$. Por el producto tensorial con $\mathcal{F}$, se obtiene la sucesión exacta:

$$\mathcal{F}(-1) \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_E \to 0, \quad \text{con} \quad \mathcal{F}_E = \mathcal{F} \otimes_\mathcal{O} \mathcal{O}_E.$$

A lo largo de U_i, se puede identificar $\mathcal{F}(-1)$ con $\mathcal{F}$, y esta identificación transforma el morfismo $\mathcal{F}(-1) \to \mathcal{F}$ definido más arriba en la multiplicación por t/t_i; como t fue escogida por estar fuera de los $\mathfrak{p}^\alpha$, t/t_i no pertenece a ninguno de los ideales primos de $M_x = \mathcal{F}_x$ si $x \in U_i$, y el morfismo anterior es inyectivo (ver [**12**], p. 122, th. 7, b”’). Se tiene entonces la sucesión exacta:

$$0 \to \mathcal{F}(-1) \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_E \to 0,$$

dando, para todo $n \in Z$, la sucesión exacta:

$$0 \to \mathcal{F}(n-1) \to \mathcal{F}(n) \to \mathcal{F}_E(n) \to 0.$$

Al aplicar la Proposición 89, se ve que:

$$\chi(\mathcal{F}(n)) - \chi(\mathcal{F}(n-1)) = \chi(\mathcal{F}_E(n)).$$

Pero el haz $\mathcal{F}_E$ es un haz coherente de $\mathcal{O}_E$-módulos, dicho de otra forma, es un haz algebraico coherente sobre E, que es un espacio proyectivo de dimensión $r-1$. Además, $\mathcal{F}_{x,E} = 0$ significa que el endomorfismo de $\mathcal{F}_x$ definido por la multiplicación por t/t_i es epiyectivo, lo que implica $\mathcal{F}_x = 0$ (ver [**6**], Cap. VIII, prop. 5.1'). Se sigue que $\mathrm{Sop}(\mathcal{F}_E) = E \cap \mathrm{Sop}(\mathcal{F})$, y, como E no contiene a ninguna de las variedades V^α, se sigue por un resultado conocido que la dimensión de $\mathrm{Sop}(\mathcal{F}_E)$ es igual a $q-1$. La hipótesis de inducción muestra entonces que $\chi(\mathcal{F}_E(n))$ es un polinomio de grado $q-1$; como es la primera diferencia de la función $\chi(\mathcal{F}(n))$ esta última es un polinomio de grado q.

Observaciones. (1) La Proposición 94 era bien conocida cuando $\mathcal{F} = \mathcal{O}/\mathcal{I}$, siendo $\mathcal{I}$ un haz coherente de ideales. Véase [**9**], nº 24, por ejemplo.

(2) La demostración anterior no utiliza la Proposición 91, luego la demuestra de nuevo.

Bibliografía

[1] N. Bourbaki. Théorie des Ensembles. Paris (Hermann).
[2] H. Cartan. *Séminaire E. N. S.*, 1950-1951.
[3] H. Cartan. *Séminaire E. N. S.*, 1951-1952.
[4] H. Cartan. *Séminaire E. N. S.*, 1953-1954.
[5] H. Cartan. *Variétés analytiques complexes et cohomologie.*, Colloque de Bruxelles, (1953), p 41-55.
[6] H. Cartan y S. Eilenberg. Homological Algebra. Princeton Math. Ser., nº19.
[7] S. Eilenberg y N. E. Steenrod. Foundations of Algebraic Topology. Princeton Math. Ser., nº15.
[8] W. V. D. Hodge y D. Pedoe. Methods of Algebraic Geometry. Cambridge Univ. Press.
[9] W. Krull. Idealtheorie. Ergebnisse IV-3. Berlin (Springer).
[10] J. Leray. *L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compacte et d'une application continue.* J. Math. Pures App., 29, (1950), p. 1-139.
[11] G. de Rham. *Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire.* Comment. Math. Helv., 28, p. 346-352.
[12] P. Samuel. *Commutative Algebra* (Notes by D. Hertzig). Cornell Univ., 1953.
[13] P. Samuel. Algèbre locale. Mém. Sci. Math., CXXIII, Paris, 1953 1953.
[14] J-P. Serre. *Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens* Ann. of Math., 58, (1953), p. 258-294.
[15] J-P. Serre. *Un théorème de dualité.* Comment. Math. Helv., 29, (1955), p. 9-26.
[16] A. Weil. Foundations of Algebraic Geometry. Colloq. XXIX.
[17] A. Weil. *Fibre-spaces in Algebraic Geometry* (Notes by A. Wallace). Chicago Univ., 1952.
[18] O. Zariski. *The concept of a simple point of an abstract algebraic variety.* Trans. Amer. Math. Soc., 62, (1947), p. 1-52.
[19] O. Zariski. *Complete linear systems on normal varieties and a generalization of a lemma of Enriques-Severi.* Ann. of Math., 55, (1952), p. 552-592.