Análogos Kählerianos de ciertas Conjeturas de Weil

Jean-Pierre Serre

En el congreso de Amsterdam, en 1954, indicaste una demostración por vía trascendente de la "fórmula de Castelnuovo" $\sigma(\xi \circ \xi') > 0$. De hecho, un procedimiento análogo, basado en la teoría de Hodge, es aplicable a variedades de cualquier dimensión, y se obtiene a la vez la positividad de ciertas trazas, y la determinación de los valores absoltos de ciertos valores propios, en perfecta analogía con tus queridas conjeturas sobre las funciones zeta.

El resultado sobre los valores propios es el que tiene un enunciado más simple:

Teorema 1. *Sea V una variedad proyectiva irreducible, no singular, definida sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, y sea $f : V \to V$ un morfismo de V en ella misma. Supongamos que existe un entero $q > 0$ y una sección hiperplana E de V tales que el divisor $f^{-1}(E)$ es algebraicamente equivalente a $q \cdot E$. Entonces, para todo entero $r \geq 0$, los valores propios del endomorfismo f_r^* de $H^r(V, \mathbb{C})$ definido por f tienen valor absoluto igual a $q^{r/2}$.*

(Observa que, si reemplazamos $\mathbb{C}$ por un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$ y f por el morfismo de Frobenius correspondiente, el divisor $f^{-1}(E)$ es equivalente a $q \cdot E$; el Teorema 1 es por tanto el análogo Kähleriano de "la hipótesis de Riemann".)

Sea $H(V)$ el álgebra de cohomología de V, suma directa de los $H^r(V, \mathbb{C})$, $r \geq 0$, y sea $u \in H^2(V, \mathbb{C})$ la clase de cohomología definida por el divisor E; con las notaciones de tu *Variedades Kählerianas* (citadas como VK en lo que sigue), la clase u es una clase *de tipo kähleriano*, y se tiene $f_2^*(u) = q \cdot u$. Para todo $r \geq 0$, pongamos:

$$g_r = q^{-r/2} f_r^*,$$

y sea g el endomorfismo de $H(V)$ definido por los g_r. Al igual que f^*, el endomorfismo g es un endomorfismo *de álgebras*, compatible con la estructura *bigraduada* de $H(V)$, y es un operador *real* (VK, Cap. IV, §5); finalmente, se tiene $g(u) = u$. Si $n = \dim V$, se tiene $g(u^n) = u^n$ y como la clase fundamental v de V es un múltiplo de u^n, se tiene que $g(v) = v$; como g es un endomorfismo de álgebras, se sigue que g conserva el *producto escalar* $I(a, b)$ de dos clases de cohomología de dimensiones complementarias (VK, Cap. IV, §7). Dotemos entonces a $H^r(V, \mathbb{C})$ de la forma sesquilineal

$$T_V(a, b) = A(a, C\bar{b}),$$

con las notaciones de VK, p. 77-78. Las fórmulas establecidas ahí muestran que T_V es una *forma hermítica positiva no denegerada*; además, está determinada de manera única por el conocimiento del álgebra bigraduada $H(V)$, dotada del producto escalar $I(a, b)$, y de los operadores $a \mapsto \bar{a}$ y $a \mapsto u \cdot a$. Como g respeta estas estructuras, g respeta también T_V, dicho de otra manera es un operador *unitario*; sus valores propios tienen entonces valor absoluto igual a 1, lo que demuestra el Teorema 1.

Observa también que g_r y g_{2n-r} son traspuestos entre sí con respecto a la forma bilineal $I(a,b)$; si los valores propios de f_r^* son $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, los de f_{2n-r}^* son entonces $q^n/\lambda_1,\ldots q^n/\lambda_k$; es el análogo kähleriano de la "ecuación funcional" de la función zeta.

Paso ahora a hablar de correspondencias, y a la generalización de la fórmula $\sigma(\xi\circ\xi')>0$. Para evitar dificultades innecesarias, tomaré el término de "correspondencia" en un sentido puramente homológico: si V y W son dos variedades kählerianas compactas conexas, de dimensión n, una correspondencia X de V en W es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal $H(V)\to H(W)$ que respeta los bigrados, y conmuta con la conjugación (en otras palabras, es un operador *real*); un tal X corresponde a una clase de cohomología real de tipo (n,n) de $V\times W$.

Sea $u_V\in H^2(V,\mathbb{C})$ la clase de cohomología definida por la estructura kähleriana de V, y sea L_V el endomorfismo $a\mapsto u_V\cdot a$ de $H(V)$; definición análoga para L_W. Diré que *la correspondencia X es compatible con las estructuras kählerianas de V y W* (en el caso algebraico, habría que hablar de *polarizaciones*) si se cumple la condición siguiente:

(c) *Para cada pareja de enteros $r,s\geq 0$, X aplica $L_V^r(\ker L_V^s)$ en $L_W^r(\ker L_W^s)$.*

Equivale a decir que X es compatible con las descomposiciones de Hodge de los espacios $H(V)$ y $H(W)$, cf. VK, p.76.

Sea ahora $X^t: H(W)\to H(V)$ la *traspeusta* de X con respecto a la dualidad de Poincaré; como la descomposición de Hodge es autodual, X^t cumple también (c). Para cada entero r, denotemos X_r y X_r^t las restricciones de X y X^t a $H^r(V,\mathbb{C})$ y $H^r(W,\mathbb{C})$; si $r\leq n$, se sabe que $L_V^{n-r}: H^r(V,\mathbb{C})\to H^{2n-r}(V,\mathbb{C})$ es un isomorfismo; denotemos L_V^{r-n} el isomorfismo recíproco. Para todo entero r, $0\leq r\leq 2n$, podemos entonces definir una aplicación lineal

$$X'_r: H^r(W,\mathbb{C})\to H^r(V,\mathbb{C})$$

por la fórmula:

$$X'_r = L_V^{r-n}\circ X_{2n-r}^t\circ L_W^{n-r}.$$

Es el operador X'_r el que juega el papel de ξ' en la fórmula de Castelnuovo. Se tiene en efecto:

Teorema 2. *Sean V y W variedades kählerianas conexas de igual dimensión, y sea X una correspondencia compatible con las estructuras kählerianas de V y W. Para cada entero r, se tiene entonces*

$$\mathrm{Tr}(X_r\circ X'_r)\geq 0;$$

además, si $\mathrm{Tr}(X_r\circ X'_r)=0$, *se tiene* $X_r=0$.

Dotemos $H^r(V,\mathbb{C})$ de la forma hermítica $T_V(a,b)$ introducida más arriba, y hagamos lo mismo para $H^r(W,\mathbb{C})$. Un cálculo simple (donde la condición (c) juega un papel esencial) muestra que los operadores $X_r: H^r(V,\mathbb{C})\to H^r(W,\mathbb{C})$ y $X'_r: H^r(W,\mathbb{C})\to H^r(V,\mathbb{C})$ son *adjuntos* entre sí con respecto a las formas T_V y T_W. La traza de $X_r\circ X'_r$ es, por tanto, simplemente el *cuadrado de la norma* (en el sentido de Hilbert-Schmidt) *del operador* X_r, y el Teorema 2 resulta evidentemente de ello.

Por supuesto, el Teorema 2 devuelve el Teorema 1: basta aplicárselo a las correspondencias del anillo generado por $X = f^*$, habida cuenta de las fórmulas $X \circ X^t = X^t \circ X = q^n$; el razonamiento es idéntico al que haces en tu *Curvas Algebraicas* para deducir "la hipótesis de Riemann" de la fórmula $\sigma(\xi \circ \xi') > 0$.

Observa igualmente que, si se toma $r = 1$, la hipótesis (c) es superflua (la descomposición de Hodge de H^1 es trivial), y se obtiene así, sin restricción sobre X, la positividad de $\mathrm{Tr}(X_1 \circ X_1')$; es un resultado esencialmente equivalente al Th. 7, p. 137, de VK. Para $r \geq 2$, la hipótesis (c) es sin embargo esencial.